

# En torr skrift om kväve

Mathias Engan

2016-6-10

# Innehåll

<b>1</b>	<b>Tryck</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Gaser och vätskor</b>	<b>7</b>
2.1	Vätska . . . . .	7
2.2	Gas . . . . .	7
2.3	Allmänna gaslagen . . . . .	7
2.4	Daltons lag . . . . .	9
2.5	Fasövergång . . . . .	9
2.6	Vattnets ångtryck . . . . .	10
2.7	Lösningar . . . . .	10
2.8	Dynamisk jämvikt . . . . .	11
2.9	Henrys lag . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Fysiologi</b>	<b>14</b>
3.1	Metabolism . . . . .	14
3.2	Cirkulationssystemet . . . . .	16
3.3	Andning . . . . .	16
3.4	Ventilation . . . . .	17
3.5	Gasutbyte . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Modell</b>	<b>19</b>
4.1	Inertgas i blod . . . . .	19
4.2	Kvävebalans . . . . .	21
4.3	Lösning . . . . .	23
4.4	Halveringstid . . . . .	25
4.5	Uppskattning av konstanten . . . . .	25
4.6	Kvävgasens partialtryck i alveolerna . . . . .	29
4.7	Vävnadstension . . . . .	30
4.8	Vävnadstyper . . . . .	31
<b>5</b>	<b>Begränsningar</b>	<b>36</b>
5.1	Tryckfallssjuka . . . . .	36
5.2	John och getterna . . . . .	38
5.3	M-värden . . . . .	40
5.4	Bühlmann . . . . .	43
5.5	Gradientfaktorer . . . . .	45
5.6	En gradientfaktor . . . . .	47
5.7	Två gradientfaktorer . . . . .	49

<b>A</b>	<b>Matematisk bakgrund</b>	<b>54</b>
A.1	Kontinuitet . . . . .	54
A.2	Derivata . . . . .	54
A.3	Integral . . . . .	55
A.4	Fundamentalsatsen . . . . .	55
A.5	Partiell integration . . . . .	56
A.6	Derivata av produkt . . . . .	56
A.7	Derivata av sammansatt funktion . . . . .	58
A.8	Differentialekvationer . . . . .	59
A.9	Integrerande faktor . . . . .	59
A.10	Distributioner . . . . .	60
	A.10.1 Derivata av distribution . . . . .	61
	A.10.2 Viktiga distributioner . . . . .	61
A.11	Faltning . . . . .	66
A.12	Laplacetransformation . . . . .	66
A.13	System . . . . .	69

# Figurer

1.1	Tryck. . . . .	5
2.1	Fasdiagram . . . . .	8
2.2	Dynamisk jämvikt . . . . .	11
2.3	Kvävgasens löslighet . . . . .	13
3.1	Alveolen . . . . .	17
4.1	Gasutbyte . . . . .	22
4.2	Halveringstid . . . . .	26
4.3	Dykare vid 30 m . . . . .	31
4.4	Dykare åter vid ytan . . . . .	32
4.5	Alla sexton vävnadstyper . . . . .	34
4.6	Kvävgastension i tre vävnader . . . . .	34
5.1	Övermättnad åter vid ytan . . . . .	41
5.2	Workmans M-värdeslinjer. . . . .	42
5.3	Bühlmanns $a$ - och $b$ -värden . . . . .	43
5.4	Jämförelse Workman/Bühlmann . . . . .	45
5.5	Kvävgastension i en vävnadstyp . . . . .	46
5.6	Gasupptagszon, riskzon och dekompressionszon. . . . .	47
5.7	Linjen $y_f$ . . . . .	48
5.8	Gradientfaktor . . . . .	49
5.9	Linjen $y_G(x)$ . . . . .	50
5.10	Gradientfaktorer . . . . .	52
A.1	Distributionen $U_f$ . . . . .	61
A.2	Enhetspuls . . . . .	62
A.3	Enhetspulståg . . . . .	63
A.4	Rektangelpulståg . . . . .	64
A.5	Deltafunktionståg . . . . .	64
A.6	Systemet $S_h$ . . . . .	69

# Tabeller

1.1	Tryckenheter . . . . .	6
2.1	Luftens sammansättning . . . . .	8
2.2	Antoinés koefficienter . . . . .	10
2.3	Vatten . . . . .	10
2.4	Henrys lags konstanter . . . . .	12
2.5	Kvävgas . . . . .	13
3.1	Syreförbrukning och koldioxidutsöndring . . . . .	14
3.2	Effekter av låga syrgashalter . . . . .	15
3.3	Respirationskvot . . . . .	15
3.4	Blodflöde, genomblödningskvot . . . . .	16
3.5	Blodgsnivåer . . . . .	18
4.1	Kvägasens löslighet i kroppen . . . . .	21
4.2	Relativ kvävemängd . . . . .	26
4.3	Halveringstider, vävnader . . . . .	33
5.1	Tryckfallssjuka, frekvens . . . . .	36
5.2	Tryckfallssjuka, olika typer . . . . .	37
5.3	Tryckfallssjuka, tidsrymd . . . . .	38
5.4	Maximala övermättnadskvoter . . . . .	40
5.5	Workmans M-värden . . . . .	41
5.6	Bühlmann, ZHL-16A, -B och -C . . . . .	44

# Kapitel 1

## Tryck

Tryck är kraft per areaenhet. Om  $F$  representerar en kraft, mätt i newton (N) och  $A$  representerar en yta om  $A$  kvadratmeter ( $\text{m}^2$ ) så är *trycket*,  $p$  lika med

$$p = \frac{F}{A} \quad (1.1)$$

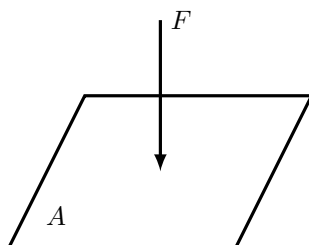
och trycket  $p$  blir då uttryckt i  $\text{N m}^{-2}$ . Se i figur 1.1 en yta  $A$  som påverkas av kraften  $F$  och som därigenom utövar trycket  $p = \frac{F}{A}$ . Enheten för tryck är pascal, där 1 Pa är  $1 \text{ N m}^{-2}$ . Tryck är även en form av lagrad (potentiell) energi och eftersom måttet på energi, en *joule* är 1 N m kan vi uttrycka 1 Pa som  $1 \text{ J m}^{-3}$ , alltså energi (joule, J) per volymenhet ( $\text{m}^3$ ).

Att mäta tryck i absoluta termer är besvärligt. Många mätningar av tryck görs därför med det omgivande lufttrycket (1 atm) som referens, och mätvärden blir då uttryckta som över- eller undertryck relativt det omgivande trycket.

Jordens atmosfär tillsammans med gravitationen orsakar lufttrycket vi upplever vid jordens yta. Lufttrycket vid havsytan varierar, men det standardiserade atmosfäriska trycket är bestämt till 101,325 kPa alltså 1 atm.

Under vattenytan är det omgivande trycket summan av lufttrycket och det tryck som vattnet åstadkommer. Den delen av det omgivande trycket som utövas av en vätska (vatten) kallas det *hydrostatiska* trycket. En vattenpelare av höjden  $d$  (djupet) med arean  $A$  åstadkommer vid pelarens botten ett tryck om

$$P = \frac{mg}{A} = \frac{\rho Vg}{A} = \frac{\rho hAg}{A} = \rho gh \quad (1.2)$$



Figur 1.1: Tryck.

1 bar	=	100 kPa
1 atm	=	101,325 kPa
1 mmHg	=	133,3224 Pa
1 fsw	=	3064,3 Pa
1 msw	=	9806,38 Pa

Tabell 1.1: Tryckenheter.

där  $m$  är vattnets massa,  $g$  är tyngdaccelerationen<sup>1</sup> och  $\rho$  är vattnets densitet. Det totala (absoluta) trycket vid pelarens botten är då

$$P_{tot} = P_0 + \rho gh \quad (1.3)$$

där  $P_0$  representerar lufttrycket. Vattnets densitet  $\rho_{H_2O}$  är  $999,972 \text{ kg m}^{-3}$  (se tabell 2.3), lufttrycket  $P_0$  är 1 atm, dvs 101 325 Pa, på 10 m djup blir då trycket

$$\begin{aligned} P_{tot} &= 101\,325 \text{ Pa} + 999,972 \text{ kg m}^{-3} \cdot 9,806\,65 \text{ m s}^{-2} \cdot 10 \text{ m}(\text{m}^2) \\ &= 101\,325 \text{ Pa} + 98\,063 \text{ Pa} \\ &= 199\,388 \text{ Pa} = 199,4 \text{ kPa} = 1,994 \text{ bar} \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$(1.5)$$

En vattenpelare utövar alltså ett hydrostatiskt tryck om  $9,8063 \text{ kPa m}^{-1}$  eller ungefär  $0,098 \text{ bar m}^{-1}$ . För att beräkna det omgivande trycket i bar vid ett visst djup (i m) kan vi alltså skriva

$$P_{tot} = 1,013\,25 + d \cdot 0,098\,063 \quad (1.6)$$

Eller ungefärligt

$$P_{tot} = 1 + 0,1 \cdot d \quad (1.7)$$

---

<sup>1</sup> Tyngdaccelerationen varierar och är olika på olika ställen på jordens yta. Det standardiserade värdet för tyngdaccelerationen,  $g$  är  $9,806\,65 \text{ m s}^{-2}$ .

## Kapitel 2

# Gaser och vätskor

Ett ämne förekommer vanligen i tre olika former, aggregationstillstånd, dessa är fast form, flytande form och gasform. Ibland kallas aggregationstillstånd även fas, men ett ämne kan ha fler faser än det finns aggregationstillstånd. I fasdiagrammet nedan (fig. 2.1) beskrivs hur övergångarna mellan de olika aggregationstillstånden (faserna) beror av tryck ( $P$ ) och temperatur ( $T$ ).

Vatten är en vätska vid rumstemperatur. Om temperaturen sänks övergår vattnet i fast form, is. Om temperaturen istället höjs övergår vattnet i gasform, vattenånga.

### 2.1 Vätska

En vätska kännetecknas av att den inte deformeras elastiskt vid skjuvning och (nästan) inte kan komprimeras under tryck. Vid en fri yta har en vätska en stor förändring i densitet. Vätskans kohesion strävar att minimera vätskans yta vilket visar sig som ytspänning.

### 2.2 Gas

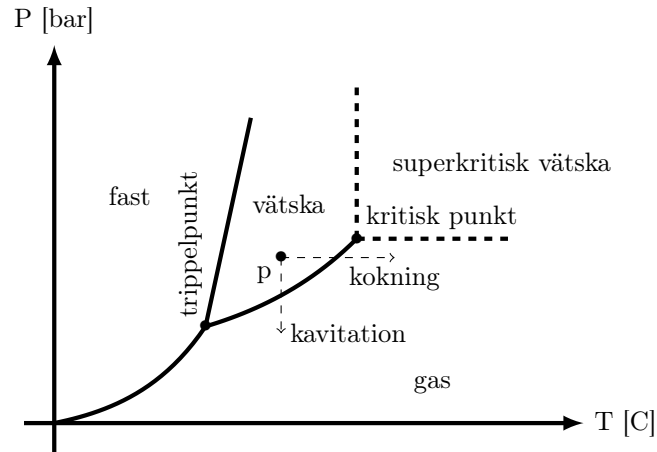
Ett ämne i gasform kännetecknas av det stora avståndet mellan ämnets enskilda partiklar (atomer, molekyler). En gas, har jämfört med andra aggregationstillstånd, låg densitet och viskositet. En gas volym påverkas av tryck och temperatur och gas kan komprimeras. Jordens atmosfär, luft, är en blandning av olika gaser, se tabell 2.1.

### 2.3 Allmänna gaslagen

Den *allmänna gaslagen* beskriver sambandet mellan tryck, volym, temperatur och substansmängd hos en ideal gas. Om  $p$  representerar gasens tryck i Pa,  $V$  gasens volym i  $\text{m}^3$ ,  $n$  substansmängden i mol,  $T$  temperaturen i K och  $R$  är gaskonstanten,  $8,3145 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}$  så gäller

$$pV = nRT \quad (2.1)$$





Figur 2.1: Fasdiagram

Gas	Beteckning	Volymandel	Massandel
Kväve	$N_2$	78,084 %	75,518 %
Syre	$O_2$	20,942 %	23,135 %
Argon	$Ar$	0,934 %	1,228 %
Koldioxid	$CO_2$	0,040 %	0,058 %
Neon	$Ne$	18,180 ppm	12,67 ppm
Helium	$He$	5,240 ppm	0,72 ppm
Metan	$CH_4$	1,760 ppm	0,97 ppm
Krypton	$Kr$	1,140 ppm	3,30 ppm

Tabell 2.1: Luftens sammansättning vid standardtryck och -temperatur (1 atm och 25 °C). Luften innehåller ytterligare omkring femton gaser men halterna av dessa räknas i miljarddelar.

En *ideal* gas är en gas utan annan interaktion mellan gasmolekylerna (eller gasatomerna) än elastiska kollisioner. Detta gäller inte för verkliga gaser, men avvikelserna är små så länge gasens densitet är mycket lägre än densiteten hos gasen kondenserad till vätska.

## 2.4 Daltons lag

Daltons lag beskriver hur trycket hos en blandning av gaser innesluten i en volym relaterar till trycket hos gaserna var för sig inneslutna i samma volym.

Om  $P_{tot}$  representerar det totala trycket hos gasblandningen innesluten i volymen  $V$  och  $p_i$  representerar trycket hos en enskild gas ur gasblandningen innesluten i samma volym  $V$  så ger Daltons lag att

$$P_{tot} = \sum_{i=1}^n p_i \quad (2.2)$$

Det totala trycket hos en gasblandning innesluten i en volym  $V$  är alltså summan av de enskilda gasernas *partialtryck*. En gas *partialtryck* är därmed det tryck som gasen utövar i volymen  $V$  om alla andra gaser avlägsnas.

Det är vanligt att uttrycka gasblandningars komponenter som andelar, *fraktioner* av gasblandningen. Alltså, en gas andel av hela gasblandningen är  $f_i = \frac{p_i}{P_{tot}}$  och då blir summan av alla fraktioner 1.

$$\sum_{i=1}^n f_i = \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{P_{tot}} = \frac{P_{tot}}{P_{tot}} = 1 \quad (2.3)$$

En tiolitersflaska som fylls med hundra liter (komprimerad) luft kommer innehålla en gasblandning vars totala tryck är tio bar. Luftens sammansättning (tabell 2.1) ger att kvävet partialtryck i flaskan är ca 7,8 bar och syrets ca 2,09 bar, osv.

## 2.5 Fasövergång

Ett ämne som vid ett visst tryck och med en viss temperatur (punkten  $p$  i figur 2.1) befinner sig i vätskefas kommer att *koka* om temperaturen höjs tillräckligt mycket för att ämnet skall övergå i gasfas. Motsvarande ämne kommer att *kavitera* om istället trycket sänks tillräckligt mycket för att ämnet skall övergå i gasfas.

Kavitation och kokning sker när en vätska övergår i gasform och gasbubblor uppstår i vätskan. Dessa gasbubblor uppstår vid mikroskopiska kärnor (nuclei) i vätskan, dessa kan vara små orenheter eller partiklar i vätskan eller mikroskopiska ojämnheter i ett kärl som omsluter vätskan.

I vissa fall kan ett ämnes fasövergång fördröjas, även fast dess temperatur höjs eller tryck sänks bortom linjen mellan trippelpunkten och den kritiska punkten.

A	B	C	$T_{min}$ [°C]	$T_{max}$ [°C]
8,071 31	1730,63	233,426	1	100
8,140 19	1810,94	244,485	99	374

Tabell 2.2: Antoinies ekvations koefficienter för vatten vid olika temperaturer.

Vatten	
Beteckning	$H_2O$
Molmassa	18,015 28 g mol <sup>-1</sup>
Densitet (0 °C, 1 atm)	999,9720 g l <sup>-1</sup>
Ångtryck (25 °C, 1 atm)	3,16 kPa
Ångtryck (37 °C, 1 atm)	6,19 kPa

Tabell 2.3: Egenskaper hos vatten.

## 2.6 Vattnets ångtryck

Antoinies ekvation beskriver förhållandet mellan ångtryck och temperatur. Antoinies ekvation lyder

$$\log p = A - \frac{B}{C + T} \quad (2.4)$$

och bestämmer ångtrycket i mmHg som ett linjärt förhållande mellan logaritmen av trycket och inversen av temperaturen i °C (1 kPa motsvarar 7,501 mmHg).

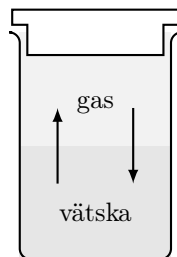
Ekvationen är en uppskattning och konstanterna är giltiga inom vissa temperaturområden. För vatten gäller konstanterna i tabell 2.2. Med hjälp av Antoinies ekvation kan nu vattnets ångtryck för olika temperaturer beräknas, se tabell 2.3.

## 2.7 Lösningar

En *lösning* är en homogen blandning av två eller flera ämnen. Vanligen kallas det ämne som finns i störst mängd *lösningsmedel*. Exempelvis löser sig vanligt salt (natriumklorid) lätt i vatten. Proportionen mellan lösningsmedel och löst ämne kallas ämnets *koncentration* i lösningen. En lösning av ett ämne i ett lösningsmedel är *mättad* då lösningen inte längre kan lösa mer av ämnet i fråga. Exempelvis kan viss mängd vatten inte lösa hur mycket salt som helst.

Ett lösningsmedels förmåga att lösa ett ämne beror på dess temperatur (och även på det omgivande trycket). Vanligen löser varma lösningsmedel mer av ett ämne än motsvarande kalla.

En *övertättad* lösning kan bildas under vissa speciella förhållanden. I en övertättad lösning är mer ämne löst än vad lösningsmedlet under normala förhållanden har kapacitet att lösa. En övertättad lösning kan skapas exempelvis genom att ett ämne löses i lösningsmedel med hög temperatur. När lösningen sedan kyls snabbare än det lösta ämnet hinner fällas ut uppstår en



Figur 2.2: Dynamisk jämvikt.

övermättad lösning. Det är även möjligt skapa en övermättad lösning genom att låta lösningsmedlet avdunsta, eller genom att förändra det omgivande trycket.

## 2.8 Dynamisk jämvikt

Gaser kan lösas i vätskor. En i vätska löst gas befinner sig i en dynamisk jämvikt. En *dynamisk jämvikt* är ett tillstånd i vilket två motverkande processer sker i samma hastighet, i det här fallet då ett gasformigt ämne löser sig i en vätska, samtidigt som det i vätskan lösta ämnet går tillbaka i gasfas.

En gas löst i en vätska utövar inte något *tryck* (*partialtryck*) i egentlig mening. Den lösta gasen befinner sig i jämvikt med den fria gasen och vi säger att den lösta gasen har en *tension* (spänning) som motsvarar partialtrycket hos en fri gas som är i jämvikt med den lösta gasen. Med andra ord gasens tension motsvarar det partialtryck samma gas i fri form behöver ha för att bibehålla jämvikten med den i vätskan lösta gasen.

## 2.9 Henrys lag

Henrys lag beskriver hur partialtrycket hos ett ämne i gasform relaterar till dess koncentration i en lösning.

Om  $p_i$  är partialtrycket för ämnet i gasform och  $c_i$  är ämnets koncentration i lösningen så ger Henrys lag att

$$p_i = K_{Hi}^{pc} \cdot c_i \quad (2.5)$$

$K_{Hi}^{pc}$  är Henrys lags flyktighetskonstant som beror av gasen ( $i$ ). I (dynamisk) jämvikt är alltså ämnets mängd i lösningen (koncentrationen,  $c_i$ ) proportionell mot ämnets partialtryck i gasform ( $p_i$ ). En liter vatten vid trycket 1 atm och temperaturen 25 °C bör alltså innehålla ungefär 14 mg kvävgas.

$$V = 1 \text{ l}$$

$$P = 1 \text{ atm}$$

$$f_{N_2} = 0,78$$

$$K_{H(N_2)}^{pc} = 1600 \text{ atm l mol}^{-1}$$

$$M_{N_2} = 28,014 \text{ g mol}^{-1}$$

Gas	Beteckning	$K_H^{pc}$ [atm l mol <sup>-1</sup> ]	$H^{cp}$ [mol m <sup>-3</sup> Pa <sup>-1</sup> ]	Molmassa [g mol <sup>-1</sup> ]
Syrgas	$O_2$	770	$1,2 \times 10^{-5}$	31,998
Vätgas	$H_2$	1300	$7,7 \times 10^{-6}$	2,016
Koldioxid	$CO_2$	29	$3,4 \times 10^{-4}$	44,009
Kvävgas	$N_2$	1600	$6,5 \times 10^{-6}$	28,014
Helium	$He$	2700	$3,8 \times 10^{-6}$	4,002
Neon	$Ne$	2200	$4,4 \times 10^{-6}$	20,180
Argon	$Ar$	710	$1,4 \times 10^{-5}$	39,948
Koloxid	$CO$	1100	$9,7 \times 10^{-6}$	28,010

Tabell 2.4: Henrys lags konstanter [12] för några olika gasers lösning i vatten vid 25 °C. 1 atm är 1,013 25 bar.

Kvävets partialtryck vid lufttrycket 1 atm blir  $p_{N_2} = P f_{N_2} = 0,78 \cdot 1 \text{ atm} = 0,78 \text{ atm}$ . Koncentrationen av kväve i vattnet ges av Henrys lag och flyktighetskonstanten  $K_{H(N_2)}^{pc} = 1600 \text{ atm l mol}^{-1}$ .

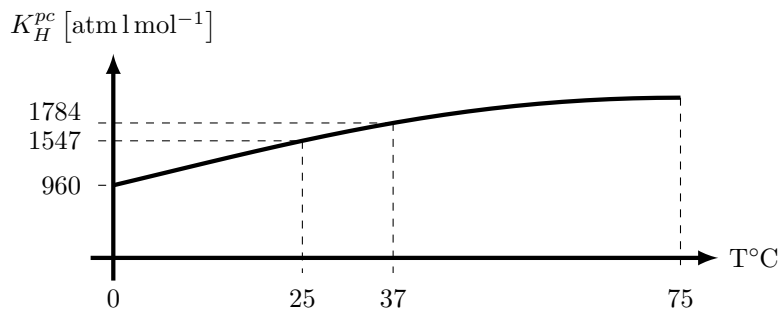
$$\begin{aligned}
 p_{N_2} &= K_{H(N_2)}^{pc} c_{N_2} \\
 c_{N_2} &= \frac{f_{N_2} \cdot P}{K_{H(N_2)}^{pc}} \\
 c_{N_2} &= \frac{1 \text{ atm} \cdot 0,78}{1600 \text{ atm l mol}^{-1}} = 0,4875 \text{ mmol l}^{-1} \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

Kvävets massa ges av  $n_{N_2} = c_{N_2} \cdot V$  och  $m_{N_2} = n_{N_2} \cdot M_{N_2}$ .

$$\begin{aligned}
 n_{N_2} &= c_{N_2} V \\
 m_{N_2} &= n_{N_2} M_{N_2} = c_{N_2} V M_{N_2} \\
 m_{N_2} &= 0,4875 \text{ mmol l}^{-1} \cdot 1 \text{ l} \cdot 28,014 \text{ g mol}^{-1} = 13,66 \text{ mg} \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

Alltså kan 1 l rent vatten vid temperaturen 25 °C och trycket 1 atm lösa ungefär 13,66 mg kväve (kvävgas).

För gasers lösning i vätskor gäller i allmänhet att lösligheten minskar med temperaturen, alltså ju högre temperaturen är desto mindre av gasen förblir i lösningen eller kan lösas i vätskan. Ett undantag är Helium, vars löslighet ökar med temperaturen. Weathersby och Homer konstaterar i [14] att kvävgas löslighet i vatten förefaller förändras med mellan  $-0,72\%$  och  $-0,9\%$  per °C. Gevantman[5] bestämmer kvävets löslighet i vatten som en funktion av temperaturen, se figur 2.3.



Figur 2.3: Kvävgasens löslighet i vatten som funktion av temperatur vid 1 atm[5]. Lösligheten som molkvot  $X_1$  beskrivs av kurvan  $\ln X_1 = A + B/T^* + C \ln T^*$  där  $T^* = T/100$  K och  $A = -67,3877$ ,  $B = 86,3213$  och  $C = 24,7981$ . Henrys konstant  $K_H^{pc}$  ges sedan av  $1,830\ 89/X_1$  [12].

Kvävgas	
Beteckning	$N_2$
Molmassa	$28,014\ \text{g mol}^{-1}$
Densitet ( $0\ ^\circ\text{C}$ , 1 atm)	$1,251\ \text{g l}^{-1}$
Löslighet i vatten	$1518\ \text{atm l mol}^{-1}$
( $K_H^{pc}$ , $25\ ^\circ\text{C}$ , 1 atm)	
Löslighet i blod	$1567\text{--}1630\ \text{atm l mol}^{-1}$
( $K_H^{pc}$ , $38\ ^\circ\text{C}$ , 1 atm)	

Tabell 2.5: Egenskaper hos kväve.

# Kapitel 3

## Fysiologi

Människan behöver energi för att överleva. Denna energi skapas på cellulär nivå genom olika kemiska reaktioner i kroppen. Basalomsättningen, BMR (Basal Metabolic Rate) uttrycker kroppens energibehov i vila. Omkring 60–75% av kroppens energiförbrukning används för att upprätthålla grundläggande funktioner, såsom andning, blodcirkulation, kroppstemperatur, etc. Ungefär 20% används till fysisk aktivitet och cirka 10% till termogenes, dvs skapande av värme.

Kroppens energibehov tillgodoses genom oxidation av olika näringsämnen (se 3.1, nedan). Oxidationen förbrukar syre. Syreförbrukningen hos en normalstor person (70 kg) i vila är cirka  $0,31 \text{ min}^{-1}$ , se tabell 3.1. Samma person andas i genomsnitt ungefär  $7,51 \text{ min}^{-1}$  luft (20,9%  $O_2$ ) och andas ut 17% syrgas och cirka 3,2% koldioxid.

### 3.1 Metabolism

Cellerna i kroppen behöver energi för att fungera. En stor del av denna energi genereras av sönderdelning av molekylerna adenosintrifosfat (*ATP*) genom hydrolys. *ATP* bryts ned till adenosindifosfat (*ADP*) och en fri fosfatgrupp. *ATP* återskapas sedan att genom *ADP* oxideras via glykolys och oxidation av näringsämnen. Vid oxidationen av näringsämnen som kolhydrater, fettsyror och proteiner förbrukas syrgas och koldioxid genereras.

Mängden koldioxid som genereras och mängden syrgas som förbrukas beror

Aktivitet	Andning [ $\text{l min}^{-1}$ ]	Syre [ $\text{l min}^{-1}$ ]	Koldioxid [ $\text{l min}^{-1}$ ]
Vila	7,5	0,3	0,24
Långsam gång	14	0,65	0,52
Gång	26	1,2	0,96
Långsam löpning	43	2	1,6
Max	65	4	3,2

Tabell 3.1: Syreförbrukning och koldioxidutsöndring hos en vuxen människa med vikten 70 kg[10].

Syrehalt [%]	Effekt
20,9	Normal syrehalt.
19	Normal undre gräns för arbete (högre aktivitet).
18	Något förhöjd andningsfrekvens.
16	Låga slocknar.
14	Känsla av obehag, sviktande omdöme, koordinationsproblem.
12	Skador på hjärtat.
10	Medvetlöshet och död.

Tabell 3.2: Effekter av syrehalter lägre än normalt[10].

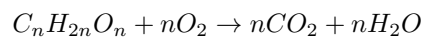
Näringsämne	$R_Q$
Kolhydrater	1,0
Fetter	0,7
Proteiner	0,8–0,9

Tabell 3.3: Respirationskvot,  $R_Q$ .

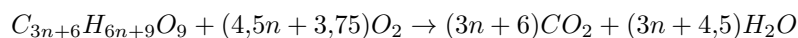
på vilka näringsämnen som oxideras. Genom att relatera mängden koldioxid som genereras till mängden förbrukad syrgas genom kvoten

$$R_Q = \frac{V_{CO_2}}{V_{O_2}} \quad (3.1)$$

är det möjligt att dra slutsatser om kroppens ämnesomsättning.  $R_Q$  kallas för *respirationskvoten*. Kolhydrater oxideras genom reaktionen



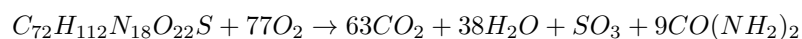
där kvoten mellan genererad koldioxid ( $CO_2$ ) och förbrukad syrgas ( $O_2$ ) är 1 : 1. Fettsyror oxideras genom reaktionen



Eftersom  $n$  är relativt stort i de flesta fettsyror kan vi förenkla kvoten koldioxid-syrgas till

$$\frac{3n + 6}{4,5n + 3,75} = \frac{3}{4,5} = \frac{2}{3} \quad (3.2)$$

Proteiner oxideras genom reaktioner som exempelvis följande (albumin)



och  $R_Q$  för albumin blir 0,818. På motsvarande sätt kan kvoten beräknas även för andra proteiner och blir mellan 0,8 och 0,9.



Organ	Flöde [litre/min]	Massa [kg]	Genomblödning [l min <sup>-1</sup> kg <sup>-1</sup> ]
Lever	1,35	1,4	0,964
Njurar	1,00	0,3	3,333
Hjärna	0,70	1,3	0,538
Hjärta	0,20	0,3	0,667
Fett	0,50	20,0	0,025
Muskler	1,05	20,0	0,053
Hud	0,25	2,5	0,100
Annat (bla ben)	0,45	24	0,019
Total	5,5	70,0	

Tabell 3.4: Blodflöde och genomblödningkvot för vävnader (organ).

## 3.2 Cirkulationssystemet

Hjärtat består av fyra hjärtrum, vänster och höger förmak ovanför vänster och höger kammare. Hjärtats funktion är att pumpa blod genom kroppens blodkärl. Hos en vuxen människa i vila pumpas hjärtat med mellan 60 och 100 slag per minut. För varje hjärtslag förflyttas ungefär 70 ml blod och sammantaget cirkuleras omkring  $5,25 \text{ l min}^{-1}$  ( $4,0\text{--}8,0 \text{ l min}^{-1}$ ). Blodets densitet är omkring  $1,060 \text{ kg l}^{-1}$ .

Blodkärl är rörformade strukturer i kroppen. Ärtärer leder syrerikt blod från hjärtat vidare ut i kroppen. Artärerna förgrenas till arterioler som i sin tur övergår i kapillärer. Kapillärerna är kroppens tunnaste blodkärl. Kapillärväggen består av endast ett lager celler och tillåter därigenom diffusion mellan blodet i kapillärer och omgivande vävnader. Kapillärerna förenas i venoler som i sin tur förenas i vener. Venerna transporterar syrefattigt blod tillbaka till hjärtat.

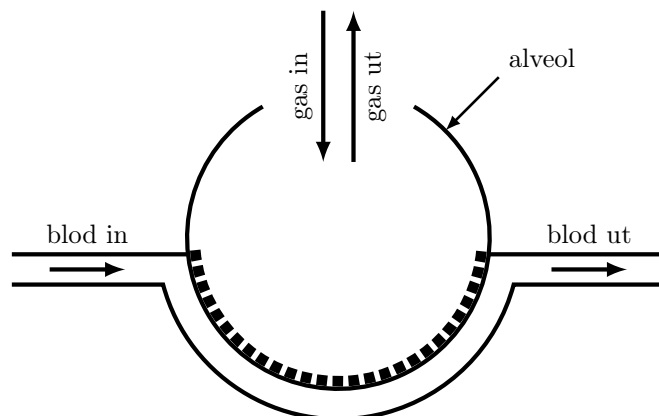
Övre och undre hålvenen ansluter till hjärtats högra del. Från högerhjärtat pumpas blod till lungorna, genom lungkretsloppet, för att syresättas och återvänder till hjärtats vänstra del. Från vänsterhjärtat pumpas det syresatta blodet, genom systemkretsloppet, till kroppens vävnader. Sedan återvänder blodet via venerna till högerhjärtat och kretsloppet fortsätter.

Blod är en vätska vars viktigaste funktion är att transportera syre från lungorna och ut till kroppens vävnader samt att transportera koldioxid tillbaka från cellerna till lungorna. En genomsnittlig vuxen man har ungefär 5 l blod, kvinnor något mindre. Utslaget per kilo kroppsvikt har en vuxen människa ungefär  $77 \text{ ml kg}^{-1}$  blod, överviktiga eller äldre kan ha upp till 15 % mindre blodvolym per kilo kroppsvikt.

Kväve löser sig i blod. Efter mätningar på blod från hund och ox[8] har konstaterats att flyktighetskonstanten  $K_{H(N_2)}^{pc}$  är  $1567 \text{ atm l mol}^{-1}$  för hundblod och  $1630 \text{ atm l mol}^{-1}$  för oxblod. Mänskligt blod torde ha en flyktighetskonstant i närheten av blod från hund eller ox.

## 3.3 Andning

Lungorna har till uppgift att genom andning syresätta blodet samt att avlägsna restprodukter såsom framförallt koldioxid. Människan har två lungor, den vän-



Figur 3.1: En alveol.

stra är något mindre än den högra på grund av hjärtats position i bröstkorget. Vänster lunga består av två lober medan höger består av tre.

Under andning passerar luft (gas) från svalget och struphuvudet genom luftstrupen och ut i bronkerna, en för vardera lungan. Bronkerna delar sig till respektive lob och sedan vidare till mindre och mindre kanaler, sk bronkioler. Bronkiolerna delas i sin tur och slutar till sist i lungblåsorna (alveolerna).

En mänsklig lunga består av ungefär 700 miljoner alveoler och hos en vuxen är alveolens diameter ungefär  $200\ \mu\text{m}$ . Alveolerna är uppbyggda av en tunn vägg av platta celler och ett nätverk av kapillärer mellan vilka elastiska fibrer och collagenfibrer ger stabilitet och elasticitet till lungblåsorna. Kapillärerna täcker cirka 70% av ytan.

Inne i alveolerna sker gasutbytet genom diffusion. Blodet som passerar genom kapillärerna tar upp syrgas och utsöndrar koldioxid. Eftersom syrgas har relativt låg löslighet är lungblåsornas sammantagna (inre) yta stor, ungefär  $70\text{--}80\text{m}^2$ . Den inre ytan är täckt av en surfaktant som reducerar alveolernas ytspänning och som gör det möjligt för gas att diffundera till och från kapillärerna.

### 3.4 Ventilation

Ventilation är processen som transporterar syrgas från atmosfären in till lungornas alveoler och som omvänt transporterar koldioxid ut från alveolerna till atmosfären. I vardagligt tal kallar vi det andning. Perfusion är en process där syrgas transporteras från alveolerna till blodet och omvänt koldioxid från blodet ut till alveolerna.

Under en minut ventileras  $V$  liter gas in och ut ur lungorna samtidigt som  $Q$  liter blod passerar genom lungornas blodkärl. Ventilation-perfusionskvoten blir då  $V/Q$ . Kvoten  $V/Q$  uttrycker balansen mellan ventilation och perfusion. Under normala förhållanden transporteras ungefär 4l gas per minut in till respektive ut från lungorna samtidigt som ungefär 5l blod passerar genom lungornas blodkärl. Detta innebär att ett normalt värde för  $V/Q$  är omkring

Gas	Symbol	mmHg	kPa
Venös syrgas	$p_vO_2$	33	4,5
Venös koldioxid	$p_vCO_2$	39–50	5,3–6,6
Alveolär syrgas	$p_AO_2$	$\approx 100$	$\approx 13,3$
Alveolär koldioxid	$p_ACO_2$	40	5,33
Artäriell syrgas	$p_aO_2$	80–100	10,7–13,3
Artäriell koldioxid	$p_aCO_2$	35–38	4,6–5,0

Tabell 3.5: Normala blodgasnivåer.

0,8. Vid sådan balans är blodgasernas värden normala enligt tabell 3.5.

### 3.5 Gasutbyte

Under normala förhållanden ventileras luft in och ut ur lungorna. Luften är sammansatt av ett flertal gaser, se tabell 2.1.

Gasutbyte sker genom diffusion när blodet passerar genom kapillärer i alveolerna. För att gas skall kunna diffundera genom ett membran, från alveolerna till kapillärerna måste gasen först lösas i vätskan. Det är en av anledningarna till att alveolerna är täckta av surfaktant.

Syrefattigt (venöst) blod från lungartären leds via kapillärerna över alveolerna. Alveolens väggar och kapillärväggarna är mycket tunna, bara omkring 2 cellager tjocka. Avståndet då kapillären är tillräckligt nära alveolens innervägg är bara omkring 1 mm och blodet passerar den sträckan på ungefär 0,75 s[11]. Den korta och snabba passagen är dock tillräcklig för att blodet och hemoglobinet i blodet ska hinna mättas med syre samt för i blodet löst koldioxid att diffundera ut i alveolerna.

# Kapitel 4

## Modell

Gaser löser sig i vätskor, dessutom löser sig mer av en gas i en vätska om gasens partialtryck höjs. Det omvända gäller också, en i vätska löst gas går ur lösningen om gasens partialtryck sänks så att den dynamiska jämvikten rubbas. Den mänskliga kroppen består ungefär till 60 % av vatten. Under förhöjt tryck, exempelvis vid dykning, måste det vara så att en del av den omgivande gasen löses i kroppen. Vad händer när trycket återgår till normala nivåer?

### 4.1 Inertgas i blod

Vid havsnivån är normalt lufttrycket 1 atm, alltså 1013 mbar. Luften innehåller 78 % kvävgas. Kvävgasens löslighet i blod (tabell 2.5) vid 38 °C och 1 atm är 1600 atm l mol<sup>-1</sup> och kvävgasens molmassa är 28,014 g mol<sup>-1</sup> (se tabell 2.5). Av Henrys lag (ekvation (2.5) i sektion 2.9) fås då att en liter blod vanligen innehåller ungefär

$$\begin{aligned} m_{N_2} &= M_{N_2} n_{N_2} = M_{N_2} c_{N_2} V = \frac{M_{N_2} f_{N_2} P V}{K_{H(N_2)}^{pc}} \\ m_{N_2} &= \frac{28,014 \text{ g mol}^{-1} \cdot 0,78 \% \cdot 1 \text{ atm} \cdot 1 \text{ l}}{1600 \text{ atm l mol}^{-1}} \\ m_{N_2} &= 13,65 \text{ mg} \end{aligned} \tag{4.1}$$

13,65 mg löst kvävgas. Henrys lag ger också att mängden löst kvävgas i blodet är direkt proportionellt mot kvävgasens partialtryck. Så, en dykare på tio meters djup upplever ett omgivande tryck om två atmosfärer (eller ungefär 2 bar) och kvävgasens partialtryck är fördubblat. Stannar dykaren tillräckligt länge på djupet kan det tänkas att blodet via gasutbytet i lungorna kommer att mätas med kvävgas så att en liter av dykarens blod istället innehåller 27,31 mg kvävgas, alltså 13,65 mg mer än på ytan.

Densiteten hos kvävgas är 1,251 g l<sup>-1</sup> vid 0 °C och 1 atm. Allmänna gaslagen

(2.1) ger att volymen förändras med temperaturen enligt

$$\begin{aligned}\frac{pV_1}{pV_0} &= \frac{nRT_1}{nRT_0} \\ \frac{V_1}{V_0} &= \frac{T_1}{T_0} \\ V_1 &= V_0 \frac{T_1}{T_0}\end{aligned}\tag{4.2}$$

vilket innebär att om 1,251 g kvävgas vid 0 °C och 1 atm har volymen 1 l så har samma mängd kvävgas volymen

$$V_1 = 1 \text{ l} \cdot \frac{311,15 \text{ K}}{273,15 \text{ K}} = 1,1391\tag{4.3}$$

1,1391 l vid temperaturen 38 °C och 1 atm. Därmed är kvävgasens densitet vid 38 °C och 1 atm alltså

$$1,251 \text{ g l}^{-1} \cdot \frac{1 \text{ l}}{1,1391} = 1,098 \text{ g l}^{-1}\tag{4.4}$$

1,098 g l<sup>-1</sup> och dykarens extra 13,65 mg kvävgas motsvarar vid ytan en volym av

$$\frac{13,65 \text{ mg}}{1,098 \text{ g l}^{-1}} = 12,43 \text{ ml}\tag{4.5}$$

12,43 ml vid 38 °C och 1 atm.

Om en dykare som väger 70 kg enbart bestod av vävnader med samma kvävgaslösande egenskaper som blod skulle denne alltså på djupet dra på sig löst kväve som motsvarar

$$\frac{13,65 \text{ mg}}{1,098 \text{ g l}^{-1}} \cdot \frac{70 \text{ kg}}{1,060 \text{ kg l}^{-1}} = 821,0 \text{ ml}\tag{4.6}$$

0,821 l vid ytan (1 atm och 38 °C) för varje bars tryck (var 10 m djup), givet att dykaren stannar tillräckligt länge för att blod och vävnader skall hinna mätas med kvävgas.

Med en blodmängd om ungefär 5,5 l och en flödes hastighet om ungefär 5,25 l min<sup>-1</sup> tar det alltså lite mer än en minut för hjärtat att fullständigt omsätta blodet i cirkulationen. Givet ovanstående antagande, att dykaren är homogen och består av vävnader med samma kvävgaslösande egenskaper som blod, samt att dykaren är fullständigt genomblödd, skulle denne alltså tämligen omgående bli mättad av kvävgas.

Nu består ju kroppen av många olika vävnader och substanser. Weathersby och Homer[14] har studerat gasers löslighet i olika substanser och vävnader i kroppen. I tabell 4.1 återfinns några av datapunkterna för kvävgas. Hjärn- vävnad löser mindre kväve än blod medan benmärg och fett klarar av att lösa mycket mer kväve än blod. Den enkla uppskattningen av mängden kväve löst i blod under höjt tryck tar inte hänsyn till att blodet, som tagit upp kväve från alveolerna genom diffusion, cirkulerar i blodkärlen. Under passagen genom kapillärerna avger blodet kvävgas till kroppens olika vävnader. En bättre modell behövs.

Substans	Löslighet, $L$	Index
Hjärna	0,011	0,738
Plasma	0,0137	0,919
Vatten	0,0144	0,966
Blod	0,0149	1,000
Benmärg	0,051	3,423
Olja (fett)	0,0730	4,899

Tabell 4.1: Kväves löslighet i olika substanser i kroppen vid  $37^\circ\text{C}$  uttryckt i Ostwaldkoefficienten,  $L$  (från Weathersby and Homer, [14]). Ostwaldkoefficienten definieras som den volym gas som löser sig i en volymenhet av substansen vid 1 atm och  $37^\circ\text{C}$ .

## 4.2 Kvävebalans

Schreiner presenterar i [13] en modell av kvävebalansen i en vävnad. Betrakta den schematiska illustrationen i figur 4.1. Venöst blod passerar kapillärerna i lungans alveoler och tar genom diffusion upp syre samt avger koldioxid. Samtidigt löses även kväve i blodet. Därefter passerar blodet en vävnad och avger genom diffusion syre och kväve samt tar upp koldioxid. Blodet återvänder därefter till lungan och kretsloppet upprepas.

Antag att kvävet partialtryck i lungan (alveolerna) är  $p_A$  och att kvävet tension i vävnaden är  $p_t$ . Blod flödar genom lungan och genom vävnaden med hastigheten  $dQ/dt$ . Vävnadens volym är  $V_t$ . Kvävgasens löslighetskonstant i blod är  $K_{Hb}^{pc}$  och motsvarande för vävnaden är  $K_{Ht}^{pc}$ .

När blod passerar lungan löser sig kväve i blodet och transporteras till vävnaden med hastigheten

$$\frac{dn_a}{dt} = \frac{dQ}{dt} p_A K_{Hb}^{pc} \quad (4.7)$$

På motsvarande sätt transporteras kväve ut ur vävnaden med hastigheten

$$\frac{dn_v}{dt} = \frac{dQ}{dt} p_t K_{Hb}^{pc} \quad (4.8)$$

I vävnaden ges mängden löst kväve av

$$n_t = V_t p_t K_t^{pc} \quad (4.9)$$

och förändringen av mängden löst kväve över tid är då

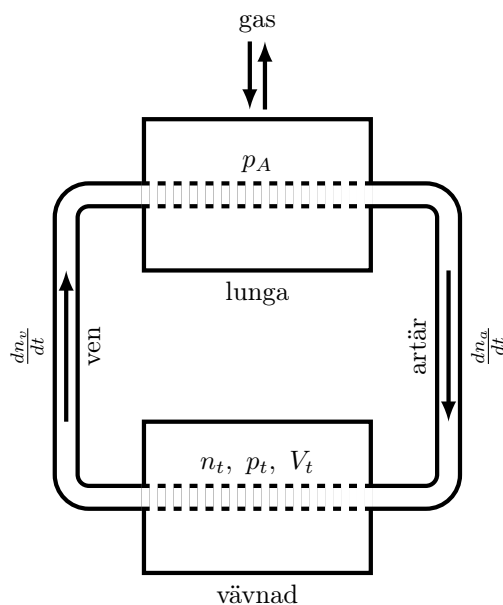
$$\frac{dn_t}{dt} = V_t \frac{dp_t}{dt} K_{Ht}^{pc} \quad (4.10)$$

Men hastigheten med vilken mängden kväve löst i vävnaden förändras är lika med skillnaden mellan mängden kväve som transporteras till vävnaden och mängden kväve som transporteras från vävnaden, alltså

$$\frac{dn_t}{dt} = \frac{dn_a}{dt} - \frac{dn_v}{dt} \quad (4.11)$$

Genom att sätta in ekvationerna (4.7), (4.8) samt (4.10) i ekvation (4.11) fås

$$V_t \frac{dp_t}{dt} K_{Ht}^{pc} = \frac{dQ}{dt} p_A K_{Hb}^{pc} - \frac{dQ}{dt} p_t K_{Hb}^{pc} \quad (4.12)$$



Figur 4.1: Gasutbyte.

som skrivs om till

$$\frac{dp_t}{dt} = \frac{1}{V_t} \frac{K_{Hb}^{pc}}{K_{Ht}^{pc}} \frac{dQ}{dt} (p_A - p_t) \quad (4.13)$$

och genom att införa konstanten  $k$  som

$$k = \frac{1}{V_t} \frac{K_{Hb}^{pc}}{K_{Ht}^{pc}} \frac{dQ}{dt} \quad (4.14)$$

blir resultatet

$$\frac{dp_t}{dt} = k (p_A - p_t) \quad (4.15)$$

vilket innebär att förändringen i kvävetens tension i vävnaden är proportionell mot skillnaden mellan kvävetens partialtryck i alveolerna och kvävetens tension i vävnaden. Uttryckt annorlunda är hastigheten med vilken mängden kväve i vävnaden ökar eller minskar proportionell mot skillnaden mellan kvävetens partialtryck i lungorna och mängden redan löst kväve i vävnaden. Ekvation (4.15) beskriver transporten av kväve till och från en vävnad och är grundläggande för det fortsatta resonemanget.

Ekvation (4.9) utgör ett centralt och grundläggande antagande i alla sk *perfusionsbegränsade* modeller. Antagandet är att det är perfusion (genomblödning, blodgenomströmning) som begränsar propagationen av kväve i kroppens vävnader och inte hastigheten med vilken kväve diffunderar till och i vävnaderna. Skulle kvävetens distribution i vävnaderna vara begränsad av diffusion blir den enkla ekvation (4.9) mer komplicerad.

### 4.3 Lösning

Transportekvationen, ekvation (4.15) är en linjär, homogen differentialekvation. Transportekvationen kan lösas med hjälp av integrerande faktor (se A.9). Skriv om transportekvationen till

$$\frac{dp_t}{dt} + kp_t = kp_A \quad (4.16)$$

Bestäm den integrerande faktorn  $m(t)$  sådan att

$$m(t) = e^{\int g(t)dt} \quad (4.17)$$

där  $g(t)$  ges av

$$g(t) = k \quad (4.18)$$

Den integrerande faktorn  $m(t)$  ges då som

$$\begin{aligned} m(t) &= e^{\int g(t)dt} = e^{\int kdt} \\ &= e^{kt+C'} = e^{C'} e^{kt} \\ &= C e^{kt} \end{aligned} \quad (4.19)$$

och nu kan lösningen till (4.16) skrivas enligt (A.59), vilket ger

$$p_t(t) = \frac{1}{m(t)} \int_0^t m(t)kp_A(t)dt + C_0 \quad (4.20)$$

insättning av  $m(t) = C e^{kt}$  ger

$$p_t(t) = \frac{1}{C e^{kt}} \left( \int_0^t C e^{kt} k p_A(t) dt + C_0 \right) \quad (4.21)$$

och efter förenkling fås  $p_t(t)$  som

$$p_t(t) = k e^{-kt} \int_0^t e^{kt} p_A(t) dt + e^{-kt} \frac{C_0}{C} \quad (4.22)$$

Partiell integration (se A.5) ger

$$\begin{aligned} p_t(t) &= k e^{-kt} \left( \left[ \frac{e^{kt}}{k} p_A(t) \right]_0^t - \int_0^t \frac{e^{kt}}{k} p'_A(t) dt \right) + e^{-kt} \frac{C_0}{C} \\ &= k e^{-kt} \left( \frac{e^{kt}}{k} p_A(t) - \frac{1}{k} p_A(0) - \frac{1}{k} \int_0^t e^{kt} p'_A(t) dt \right) + e^{-kt} \frac{C_0}{C} \\ &= p_A(t) - e^{-kt} p_A(0) - \underbrace{e^{-kt} \int_0^t e^{kt} p'_A(t) dt}_{I_1} + e^{-kt} \frac{C_0}{C} \end{aligned} \quad (4.23)$$



Upprepad partiell integration av integralen  $I_1$  i (4.23) ger

$$\begin{aligned}
 e^{-kt} \int_0^t e^{kt} p'_A(t) dt &= e^{-kt} \left( \left[ \frac{e^{kt}}{k} p'_A(t) \right]_0^t - \int_0^t \frac{e^{kt}}{k} p''_A(t) dt \right) \\
 &= e^{-kt} \left( \frac{e^{kt}}{k} p'_A(t) - \frac{1}{k} p'_A(0) - \frac{1}{k} \int_0^t e^{kt} p''_A(t) dt \right) \\
 &= \frac{1}{k} p'_A(t) - \frac{e^{-kt}}{k} p'_A(0) - \frac{e^{-kt}}{k} \int_0^t e^{kt} p''_A(t) dt \quad (4.24)
 \end{aligned}$$

Genom att införa (4.24) i (4.23) fås uttrycket för  $p_t(t)$  som

$$\begin{aligned}
 p_t(t) &= p_A(t) - e^{-kt} p_A(0) - \frac{1}{k} p'_A(t) \\
 &\quad + \frac{e^{-kt}}{k} p'_A(0) + \underbrace{\frac{e^{-kt}}{k} \int_0^t e^{kt} p''_A(t) dt}_{I_2} + e^{-kt} \frac{C_0}{C} \quad (4.25)
 \end{aligned}$$

Om  $p_A(t)$  är en linjär funktion av typen  $vt + d$  saknar  $p_A(t)$  andraderivata, dvs  $p''_A(t) = 0$  för alla  $t$  och integralen  $I_2$  i ekvation (4.25) blir noll. I annat fall (om  $p_A(t)$  har fler nollskilda derivator) kan utvecklingen av integralen fortsättas. Efter omskrivning fås

$$p_t(t) = p_A(t) - e^{-kt} p_A(0) - \frac{1}{k} (p'_A(t) - e^{-kt} p'_A(0)) + e^{-kt} \frac{C_0}{C} \quad (4.26)$$

eller

$$p_t(t) = p_A(t) - \frac{1}{k} p'_A(t) + e^{-kt} \left( \frac{C_0}{C} - p_A(0) + \frac{1}{k} p'_A(0) \right) \quad (4.27)$$

Begynnelsevärdet bestäms genom antagandet att  $p_t(0) = p_0$ . Vid  $t = 0$  gäller då

$$\begin{aligned}
 p_t(0) &= p_A(0) - \frac{1}{k} p'_A(0) + e^{-k \cdot 0} \left( \frac{C_0}{C} - p_A(0) + \frac{1}{k} p'_A(0) \right) \\
 p_t(0) &= p_A(0) - p_A(0) - \frac{1}{k} p'_A(0) + \frac{1}{k} p'_A(0) + \frac{C_0}{C} \\
 p_t(0) &= \frac{C_0}{C} \quad (4.28)
 \end{aligned}$$

och eftersom  $p_t(0) = p_0$  måste alltså  $\frac{C_0}{C}$  vara lika med  $p_0$ . Slutligen blir lösningen till transportekvationen (4.15) enligt följande

$$p_t(t) = \underbrace{e^{-kt} p_0}_{T_1} + \underbrace{p_A(t) - \frac{1}{k} p'_A(t)}_{T_2} - \underbrace{e^{-kt} \left( p_A(0) - \frac{1}{k} p'_A(0) \right)}_{T_3} \quad (4.29)$$

Den första termen ( $T_1$ ) i ekvationen (4.29) representerar det exponentiellt avklingande initialvärdet av vävnadens kvävetension. Andra termen ( $T_2$ ) representerar kvävgasens alveolära partialtryck. Vävnadens kvävetension kommer över tid att närma sig detta värde. Den tredje termen ( $T_3$ ) representerar en exponentiellt avklingande påverkan från initialvärdet av kvävgasens alveolära partialtryck.

## 4.4 Halveringstid

I lösningen till transportekvationen (4.29) förekommer den en smula besvärliga konstanten  $k$  som tidigare (4.14) bestämts till

$$k = \frac{1}{V_t} \frac{K_{Hb}^{pc}}{K_{Ht}^{pc}} \frac{dQ}{dt} \quad (4.30)$$

$k$  beror av vävnadens volym,  $V_t$ , blodgenomströmningen,  $dQ/dt$  och kvoten mellan kvävetets löslighet i blod och kvävetets löslighet i vävnaden,  $K_{Hb}^{pc}/K_{Ht}^{pc}$ . Konstanten är med all sannolikhet svår att beräkna analytiskt.

För den enkla exponentialfunktionen

$$y(t) = Ce^{-kt} \quad (4.31)$$

gäller att

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Ce^{-kt} = 0 \quad (4.32)$$

för alla  $k > 0$ . Detta innebär att vi inte kan bestämma tidpunkten  $t_z$  där  $y(t_z) = 0$ . Men lyckligtvis är det möjligt att bestämma, exempelvis tidpunkten  $T_{1/2}$  där  $y(T_{1/2}) = y(0)/2$ , alltså vid vilken tidpunkt begynnelsevärdet  $y(0)$  har halverats. Denna tidpunkt kallas *halveringstid*. I figur 4.2 ser vi att vid tidpunkten  $T_{1/2}$  har värdet av  $p_t(t)$  minskat från  $p_0$  till hälften, dvs  $p_0/2$ . Efter ytterligare en tidsperiod  $T_{1/2}$  har  $p_t(t)$  halverats en gång till.

Halveringstiden  $T_{1/2}$  kan enkelt beräknas genom

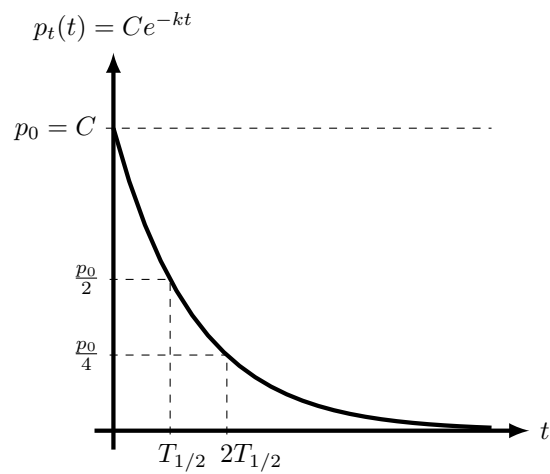
$$\begin{aligned} y(T_{1/2}) &= \frac{y(0)}{2} = \frac{C}{2} \\ y(T_{1/2}) &= Ce^{-kT_{1/2}} \\ \frac{C}{2} &= Ce^{-kT_{1/2}} \\ e^{kT_{1/2}} &= 2 \\ kT_{1/2} &= \ln 2 \\ T_{1/2} &= \frac{\ln 2}{k} \end{aligned} \quad (4.33)$$

Det är tänkbart att halveringstiden  $T_{1/2}$  är enklare att bestämma än konstanten  $k$ . Om det är möjligt att mäta hur lång tid det tar för kvävehalten  $p_t$  i transportekvationens tänkta vävnad att halveras så är vävnadens halveringstid  $T_{1/2}$  bestämd, och därmed slipper man beräkna konstanten  $k$  som istället ges av

$$k = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \quad (4.34)$$

## 4.5 Uppskattning av konstanten

Kvävgas löser sig ungefär 4,9 gånger bättre i fett än i blod (tabell 4.1). En normal vuxen person består av ungefär 20–30 % fett och ungefär 7–8 % blod. Genom att göra antagandet att de resterande omkring 67 % av kroppens vävnader har samma kvävgaslösande egenskaper som vatten beräknas den totala



Figur 4.2: Halveringstiden  $T_{1/2}$ .

Vävnadstyp	Andel	$N_2$ -index	$N_2$ -faktor
Blod	0,08	1,0	0,080
Fett	0,25	4,9	1,225
Annat	0,67	1,0	0,670
Total	1,00		1,975

Tabell 4.2: Kvävemängd när kroppen är fullt mättad uttryckt relativt kvävetets löslighet i vatten/blod.

mängd kväve som potentiellt kan lösas i kroppen jämfört med samma mängd vatten. Resultatet (se tabell 4.2) blir att kroppen kan lösa 1,975 gånger så mycket kväve som samma mängd vatten (blod). Det är nu möjligt att relatera blodets kvävelösande och -transporterande egenskap med kvävetens tension i vävnaderna.

En dykare blir plötsligt förpassad till djupet (dvs utsatt för högre tryck). Kvävetens partialtryck i alveolerna blir då högre än motsvarande tension i vävnaderna. När blod passerar kapillärerna i alveolerna blir det nästan omedelbart fullständigt mättat med kväve. Antag att alla vävnader i kroppen är helt genomblödda. Det kväve som tagits upp av blodet i lungornas alveoler transporteras via blodkärlen till vävnaderna. Där utjämnas kvävet i blodet omedelbart med kvävet i vävnaderna (analogt med utjämnningen i passagen genom alveolerna).

Vid varje fullständig omsättning av blodet i cirkulationssystemet kommer en mängd kväve motsvarande blodets andel av hela kroppens förmåga att lösa kväve att utjämnas vävnaderna. Alltså,  $1,975/0,080$  eller cirka  $1/25$  (24,7) av skillnaden i kvävetens partialtryck i alveolerna och kvävetens tension i vävnaderna utjämnas i varje omsättning av blodet.

Vid tidpunkten för tryckhöjningen är kvävetensionen i vävnaderna  $p_0$ . Säg, för detta resonemang, att  $p_0 = 0$ . Efter en fullständig omsättning av blodet är kvävetensionen nu  $p_1 = fP_A$  där  $P_A$  är kvävgasens (förhöjda) alveolära partialtryck, orsakat av höjningen av det omgivande trycket och  $f = 1/25$ . Efter nästa omsättning är kvävetensionen  $p_2 = p_1 + f(P_A - p_1)$ . Alltså  $p_2$  blir den redan lösta mängden kväve ( $p_1$ ) plus mängden kväve som transporteras in till vävnaderna i en ny blodomsättning, dvs  $1/25$ -del ( $f$ ) av skillnaden mellan kvävgasens alveolära partialtryck och vad som redan finns löst i vävnaderna ( $P_A - p_1$ ) och så vidare. Till slut gäller förhållandet

$$p_n = p_{n-1} + f(P_A - p_{n-1}) \quad (4.35)$$

Låter man tiden gå så kommer kvävetensionen  $p_n$  till slut att stabiliseras vid ett värde,  $p^*$ . I det stabila tillståndet är alltså  $p_n$  är lika med  $p_{n-1}$ . Sätt in  $p^* = p_n = p_{n-1}$  i ekvation (4.35) och lös ut  $p^*$

$$\begin{aligned} p^* &= p^* + f(P_A - p^*) \\ p^* - p^* + fp^* &= fP_A \\ fp^* &= fP_A \\ p^* &= P_A \end{aligned} \quad (4.36)$$

Därmed ges att kvävetensionen kommer att stabiliseras vid värdet  $P_A$ , vilket är intuitivt självklart. Vidare, låt  $x_n = p_n - p^*$ , dvs  $p_n = x_n + P_A$  och sätt in  $x_n$  i ekvation (4.35) för att få den omformade ekvationen som

$$\begin{aligned} x_n + P_A &= x_{n-1} + P_A + f(P_A - x_{n-1} - P_A) \\ x_n &= x_{n-1} - fx_{n-1} \\ x_n &= (1 - f)x_{n-1} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Lös (4.37) genom att ansätta  $x_n = C\lambda^n$  som lösning, vilket ger

$$\begin{aligned}x_n &= C\lambda^n \\x_n &= (1-f)x_{n-1} \\C\lambda^n &= (1-f)C\lambda^{n-1} \\ \lambda &= (1-f)\end{aligned}\tag{4.38}$$

och lösningen till (4.37) blir

$$x_n = C(1-f)^n\tag{4.39}$$

men  $x_n = p_n - P_A$  så (4.39) blir

$$\begin{aligned}p_n - P_A &= C(1-f)^n \\p_n &= P_A + C(1-f)^n\end{aligned}\tag{4.40}$$

och eftersom  $p_0 = 0$  fås  $C$  som

$$\begin{aligned}p_0 &= P_A + C(1-f)^0 \\0 &= P_A + C \\C &= -P_A\end{aligned}\tag{4.41}$$

Slutligen blir lösningen

$$p_n = P_A - P_A(1-f)^n\tag{4.42}$$

eller

$$p_n = P_A(1 - (1-f)^n)\tag{4.43}$$

Nu kan halveringstiden beräknas genom att sätta in  $p_n = p^*/2$  eller alltså  $p_n = P_A/2$  i ekvationen för lösningen (4.43) för att få  $n$  som

$$\begin{aligned}\frac{P_A}{2} &= P_A(1 - (1-f)^n) \\ \frac{1}{2} &= 1 - (1-f)^n \\ (1-f)^n &= \frac{1}{2} \\ n \ln(1-f) &= \ln \frac{1}{2} \\ n &= -\frac{\ln 2}{\ln(1-f)}\end{aligned}\tag{4.44}$$

Resonemanget ovan gav att  $f$  är ungefär  $1/25$  vilket betyder att halveringstiden (räknat i antal omsättningar av blodet) blir

$$n = -\frac{\ln 2}{\ln(1 - \frac{1}{25})} = -\frac{\ln 2}{\ln \frac{24}{25}} = 16,98\tag{4.45}$$

Det tar ungefär en minut för hjärtat att fullständigt omsätta blodet (se 3.2) vilket innebär att

$$T_{1/2} = n \cdot 1 \text{ min} = 16,98 \text{ min}\tag{4.46}$$

och med hjälp av ekvationen (4.34) ges uppskattningen av konstanten  $k$  som

$$k = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{0,693147}{16,98} = 40,82 \times 10^{-3} \text{ min}^{-1}\tag{4.47}$$

## 4.6 Kvävgasens partialtryck i alveolerna

Under andningen inspireras en gasblandning, normalt sett luft, men i denna framställning används en luftliknande blandning ( $X$ ) av 78,1 % kvävgas (inertgas) och 20,9 % syrgas. Mängden koldioxid i vanlig luft (0,04 %) är i sammanhanget försumbar och antas vara obefintlig.

På vägen via munhåla, näsa, svalg, luftstrupe, bronker, och bronkioler till alveolerna befuktas luften och mättas med vattenånga vid en temperatur av 37 °C. Därmed kommer vatten i gasform att bli en del av gasblandningen i alveolerna.

Det omgivande trycket är  $P_{amb}$ . Eftersom luftvägarna är öppna är trycket i alveolen ungefär detsamma som det omgivande trycket, dvs  $P_A = P_{amb}$ . I samband med att blodet passerar genom alveolens kapillärer avges koldioxid och syrgas tas upp, det innebär att gasblandningen i alveolen blir rikare på koldioxid och fattigare på syrgas än den inspirerade gasblandningen. Daltons lag (2.2) ger att det totala trycket i alveolen är summan av gasblandningens partialtryck

$$P_A = \sum_{i=1}^n p_i = p_X + p_{CO_2} - p_{O_2} + p_{H_2O} \quad (4.48)$$

Där  $p_X$  representerar partialtrycket som utövas av den inspirerade gasblandningen. Observera att mängden syrgas i  $p_X$  reduceras.

Om gasvolymen i alveolen antas vara  $V_A$  och eftersom  $f_i = \frac{V_i}{V_{tot}}$  samt  $p_i = f_i P_{tot}$  kan vi skriva

$$V_{O_2} = f_{O_2} V_A = p_{CO_2} \frac{P_A}{V_A} \quad (4.49)$$

$$V_{CO_2} = f_{CO_2} V_A = p_{CO_2} \frac{P_A}{V_A} \quad (4.50)$$

och med hjälp av respirationskvoten  $R_Q$  kan  $p_{O_2}$  uttryckas som

$$\begin{aligned} R_Q &= \frac{V_{CO_2}}{V_{O_2}} = \frac{p_{CO_2} V_A P_A}{p_{O_2} P_A V_A} \\ p_{O_2} &= \frac{p_{CO_2}}{R_Q} \end{aligned} \quad (4.51)$$

och summan  $p_{CO_2} - p_{O_2}$  blir då

$$p_{CO_2} - \frac{p_{CO_2}}{R_Q} = p_{CO_2} \left(1 - \frac{1}{R_Q}\right) = p_{CO_2} \frac{1 - R_Q}{R_Q} \quad (4.52)$$

Nu kan ekvationen (4.48) skrivas som

$$P_A = p_X + p_{H_2O} + p_{CO_2} \frac{R_Q - 1}{R_Q} \quad (4.53)$$

och eftersom trycket i alveolen är lika med det omgivande trycket kan partialtrycket hos den inspirerade gasblandningen  $p_X$  lösas ut som

$$p_X = P_{amb} - p_{H_2O} - p_{CO_2} \frac{R_Q - 1}{R_Q} \quad (4.54)$$

Kvävets partialtryck fås sedan som

$$p_{X_{N_2}} = f_{N_2} \left( P_{amb} - p_{H_2O} - p_{CO_2} \frac{R_Q - 1}{R_Q} \right) \quad (4.55)$$

För att beräkna kvävet partialtryck i alveolen sätter vi in värden i ekvationen (4.55) enligt följande

$$\begin{aligned} f_{N_2} &= 0,781 \\ p_{H_2O} &= 6,19 \text{ kPa} \\ p_{CO_2} &= 5,33 \text{ kPa} \\ R_Q &= 0,8 \end{aligned}$$

Koldioxidens partialtryck  $p_{CO_2}$  har vi från tabell 3.5 i avsnitt 3.4, vattnets ångtryck  $p_{H_2O}$  vid  $37^\circ\text{C}$  ges av Antoines ekvation (2.4) eller ur tabell 2.2 i avsnitt 2.6. Resultatet blir

$$\begin{aligned} p_{X_{N_2}} &= 0,781 \left( P_{amb} - 6,19 \text{ kPa} - 5,33 \text{ kPa} \frac{0,8 - 1}{0,8} \right) \\ &= 0,781 P_{amb} - 3,79 \text{ kPa} \end{aligned} \quad (4.56)$$

eller för godtycklig kvävehalt

$$p_{X_{N_2}} = f (P_{amb} - 4,86 \text{ kPa}) \quad (4.57)$$

Vid havsytan är det omgivande trycket ungefär 1 atm, vilket alltså motsvarar 101,3 kPa. Kvävets partialtryck vid havsnivån är då 79,1 kPa och kvävet partialtryck i en alveol är 75,3 kPa, en skillnad på ungefär 4,8%. Ju högre det omgivande trycket är (ju djupare dykaren befinner sig) desto mindre påverkar vattnets ångtryck och respirationen kvävet partialtryck i alveolen. Det omvända gäller naturligtvis också, alltså ju lägre det omgivande trycket är (högre höjd) desto större inverkan har vattenånga och respiration på kvävet partialtryck.

## 4.7 Vävnadstension

Vi har nu lösningen till transportekvationen i ekvation (4.29), en uppskattning av konstanten  $k$  (4.47) och en formel för beräkning av kvävet alveolära partialtryck  $p_A = p_{X_{N_2}}$  (4.57) och kan studera resultatet

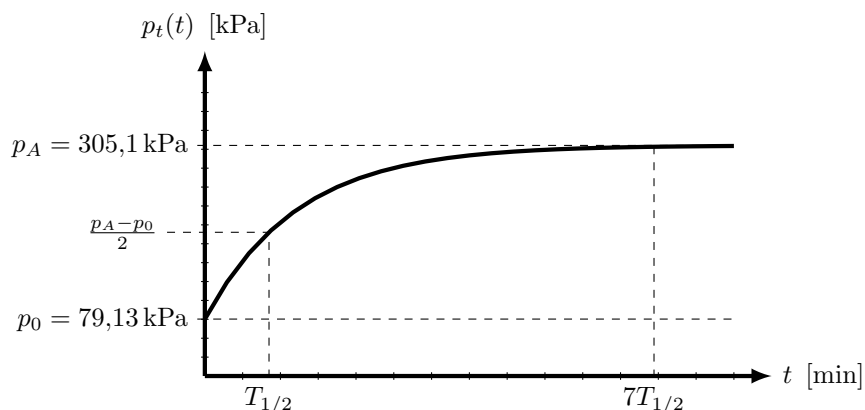
$$p_t(t) = e^{-kt} p_0 + p_A(t) - \frac{1}{k} p'_A(t) - e^{-kt} \left( p_A(0) - \frac{1}{k} p'_A(0) \right) \quad (4.58)$$

$$k = 40,82 \times 10^{-3} \text{ min}^{-1} \quad (4.59)$$

$$p_A = f (P_{amb} - 4,86 \text{ kPa}) \quad (4.60)$$

En dykare som, efter ett tillräckligt långt ytintervall, har utjämnat den i kroppen lösta kvävgasen till en vid vattenytan normal nivå (lufttryck 1 atm) befinner sig plötsligt på ett djup av 30 m. Det omgivande trycket  $P_{amb}$  fås ur ekvation (1.6) och blir

$$P_{amb} = 1,01325 + 0,098063 \cdot 30 \text{ m} = 395,5 \text{ kPa} \quad (4.61)$$



Figur 4.3: Dykare omedelbart trycksatt till ett djup av 30 m, halveringstid  $T_{1/2} = 16,98$  min,  $7T_{1/2} \approx 119$  min.

Dykaren andas komprimerad luft med en kvävehalt av 78,1%. Vi har alltså

$$\begin{aligned} p_0 &= 0,781 \cdot 1 \text{ atm} - 3,79 \text{ kPa} = 75,34 \text{ kPa} \\ p_A &= 0,781 P_{amb} - 3,79 \text{ kPa} = 305,1 \text{ kPa} \\ p'_A &= 0 \\ k &= 40,82 \times 10^{-3} \text{ min}^{-1} \end{aligned}$$

och  $p_t$  blir

$$\begin{aligned} p_t(t) &= 75,34e^{-40,82 \times 10^{-3} \cdot t} + 305,1 - 0 - (305,1 - 0)e^{-40,82 \times 10^{-3} \cdot t} \\ p_t(t) &= 305,1 - 229,8 \cdot e^{-40,82 \times 10^{-3} \cdot t} \end{aligned} \quad (4.62)$$

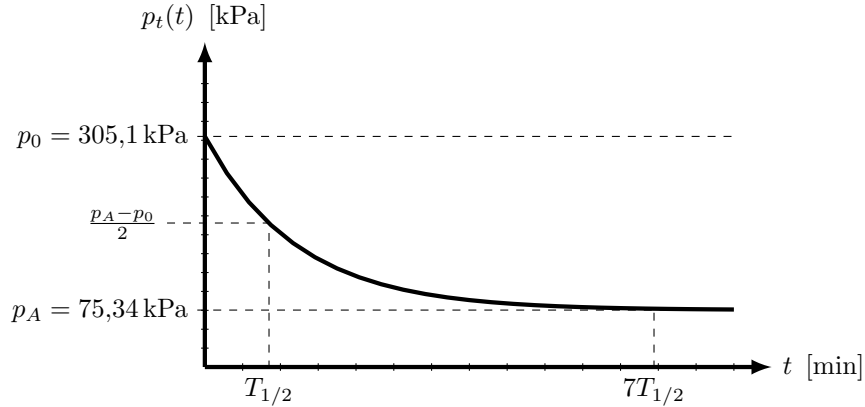
Vävnadstensionen  $p_t(t)$  illustreras i figur 4.3. Dykarens vävnader kommer att vara i princip mättade med kvävgas efter en tidsperiod på djupet 30 m om ungefär sju halvtider, eller cirka 119 min. Om nu den med kväve mättade dykaren omedelbart transporteras upp till ytan kommer återigen den i vävnadernas lösta kvävgasen att utjämnas, men nu åt andra hållet. Alltså, den i vävnaderna lösta kvävgasen avges, via lungorna, och vävnadernas kvävgashalt återgår till den normala, se figur 4.4.

Denna modell beskriver på ett trovärdigt sätt hur kväve går in i och hur kväve går ut ur en vävnad. En stor nackdel med modellen är att den blott beskriver en enda genomsnittsvävnad. Eftersom kroppen består av en mängd olika vävnadstyper kommer modellen att underskatta mängden löst kväve i vissa vävnader (exempelvis fett) medan den kommer att överskatta mängden löst kväve i andra. Överskattningen är kanske inte något stort problem men underskattningen kommer att visa sig vara det.

## 4.8 Vävnadstyper

I avsnitt 4.5 gjordes antagandet att de kvävgaslösande egenskaperna i kroppen kan uppskattas med hjälp av en genomsnittsvävnad. I avsnittet 4.2 fanns ekvationen för konstanten  $k$  (4.14) vara beroende av kvoten mellan kvävetets löslighet





Figur 4.4: Dykare omedelbart upptagen från ett djup av 30 m, halveringstid  $T_{1/2} = 16,98$  min,  $7T_{1/2} \approx 119$  min.

i blodet och kvävetts löslighet i vävnaden i fråga samt också beroende av kvoten mellan blodflödet genom vävnaden och vävnadens volym.

Genomsnittsvävnaden i avsnitt 4.5 antogs vara en representativ blandning av vatten och fett och har då relativt blod (vatten) kvävgaslösande egenskaper enligt

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{K_{Hv}^{pc}}{\alpha K_{Hf}^{pc} + (1 - \alpha) K_{Hv}^{pc}} \\ &= \frac{1}{1 + \alpha \left( \frac{K_{Hf}^{pc}}{K_{Hv}^{pc}} - 1 \right)} \end{aligned} \quad (4.63)$$

där  $\alpha$  representerar andelen fettvävnad och kvoten  $K_{Hf}^{pc}/K_{Hv}^{pc}$  är kvoten mellan fettets och vattnets kapacitet att lösa kvävgas. Andelen fetter i kroppens olika vävnader varierar. Därför blir slutsatsen att modellen måste ta hänsyn till alla (tillräckligt många) olika vävnadstyper och dess kvävgaslösande förmågor.

En förutsättning i det ovanstående resonemanget var att vävnaden var *fullständigt genomblödd*, alltså att kvävgasen som transporteras med blodet vid passage omedelbart och fullständigt löses i vävnaden och att vävnaden alltså ständigt är i balans med blodets kvävehalt. Men det är helt säkert så att alla vävnader inte är till samma grad genomblödda. Undantaget lungorna är hjärnan och levern mest genomblödda medan fettvävnaderna är minst. Detta innebär att transporten av kväve via blodet är effektivast (snabbast) till hjärna och lever, medan det tar längre tid att transportera kväve via blodet för att mätta fettvävnaderna med kväve. Låt kvoten mellan blodflöde  $dQ_t/dt$  och vävnadsvolym  $V_t$  vara *perfusionskvoten*,  $R_t = Q'_t/V_t$ , för vävnaden  $t$ . Då kan konstanten  $k_t$  skrivas som

$$k_t = \beta_t \cdot R_t = \frac{R_t}{1 + \alpha_t \left( \frac{K_{Hf}^{pc}}{K_{Hv}^{pc}} - 1 \right)} \quad (4.64)$$

och  $K_{Hf}^{pc}/K_{Hv}^{pc} - 1$  är ungefär<sup>1</sup> 4,1 (se tabell 4.1). Ur förhållandet  $k = \ln 2/T_{1/2}$

<sup>1</sup> I tabell 4.1 uttrycks kvävgasens löslighet i Ostwaldkoefficienten,  $L$ , medan  $K_{Hx}^{pc}$  hänfö-

$\alpha_t$	$R_t$			
	0,50	0,10	0,050	0,010
1,00	7,1	35,4	70,7	353,5
0,67	5,2	25,9	51,8	258,8
0,33	3,3	16,4	32,8	164,0
0,00	1,4	6,9	13,9	69,3

Tabell 4.3: Halveringstider för sexton olika vävnader.

(ekvation 4.34) får vi sedan halveringstiden som

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2 (1 + 4,1\alpha_t)}{R_t} \quad (4.65)$$

Genom att variera  $\alpha_t$  och  $R_t$  är det möjligt att erhålla en konstant  $k_t$  (och därmed halveringstiden) för den minst kvävgaslösande och minst genomblödda vävnaden, liksom för den vävnad som löser mest kvävgas och som är mest genomblödd och därtill för alla olika vävnadstyper med egenskaper däremellan.

I tabell 3.4 i avsnitt 3.2 ser vi att värdet för genomblödningskvoten för människans vävnader varierar från ungefär  $0,019 \text{ l min}^{-1}$  för ben och övriga vävnader upp till hela  $3,33 \text{ l min}^{-1}$  för njurarna. Organ som njurarna, med mycket hög genomblödning kommer att ge upphov till så korta halveringstider att de i det här sammanhanget är betydelselösa. Istället väljes representativa genomblödningskvoter mellan 0,5 och  $0,05 \text{ l min}^{-1}$ . Analogt väljes fetthalten jämt fördelat i intervallet från 0% till 100% och bör då innefatta alla tänkbara vävnadstyper. Resultatet av beräkningen av halveringstiderna för de sexton olika vävnaderna återfinns i tabell 4.3 och ligger mellan 1,4 min och nästan 7 timmar.

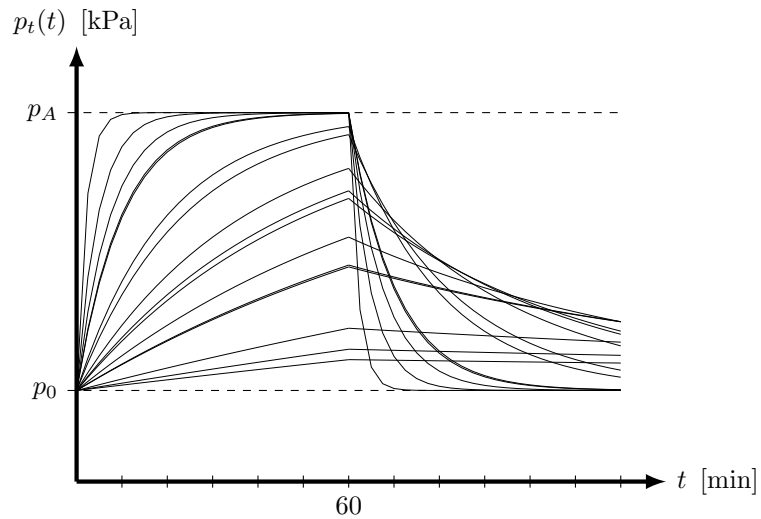
Parametrarna  $R_t$  och  $\alpha_t$  i tabell 4.3 valdes närmast godtyckligt. Resultatet blev att några av värdena i tabellen ligger nära varandra, exempelvis 6,9 och 7,1 samt 32,8 och 35,4. Dessa fyra halvtider kommer var för sig inte att bidra med någon betydelsefull extra information och ett värde ur varje par kan förkastas.

Om en dykare hastigt förpassas till djupet och stannar där en tidsperiod så kommer alltså de ovan härledda sexton vävnadstyperna alla mättas med kväve i olika takt. När dykaren sedan (hastigt) tas upp från djupet kommer de sexton vävnaderna att avsöndra kväve, med sina respektive hastigheter. I figur 4.5 ser vi kvävetensionen i de sexton olika vävnadstyperna hos en dykare som befunnit sig på ett djup av 30 m under 60 min. Den snabbaste vävnaden (den med kortast halveringstid) mättas inom tio minuter och utsöndrar kväve lika snabbt efter uppstigningen. Den långsammaste däremot har bara mättats till en bråkdel av sin kapacitet och utjämningen sker även den långsamt.

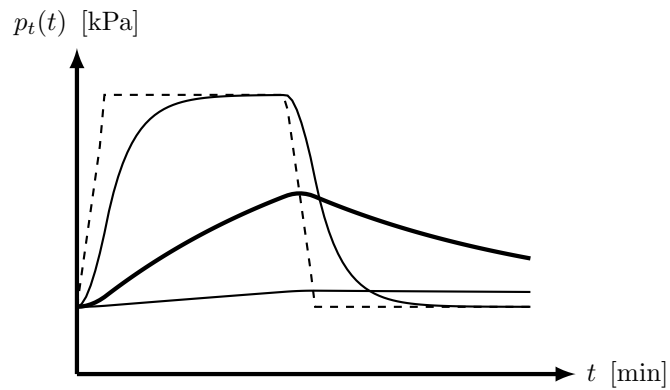
I figur 4.5 är det tydligt att de snabbaste vävnadernas lösta kväve jämnas ut inom en kort tidsperiod varefter vävnaderna med medellånga halveringstider tar längre tid på sig att jämnas ut. De långsamma vävnaderna (med lång halveringstid) har inte hunnit ta upp stora mängder kväve men utjämnas naturligtvis långsammast under ytintervallet. Den vävnad som vid en tidpunkt har högst halt av kväve kallas *ledande*.

---

sig till Henrys flyktighetskonstant. Eftersom det är kvoten mellan flyktigheten hos fett och flyktigheten hos vatten som är intressant har det ingen egentlig betydelse om vi använder Ostwaldkoefficient eller Henrys flyktighetskonstant.



Figur 4.5: Kvävgastension i alla sexton vävnadstyper hos en dykare omedelbart trycksatt till ett djup av 30 m i 60 min och sedan omedelbart upptagen till ytan.



Figur 4.6: Kvävgastensioner i tre vävnader, med halvtiderna 2 min, 20 min och 200 min hos en dykare som tillbringat 20 min på ett djup av 30 m. Upp- och nedstigningshastigheterna var  $9 \text{ m min}^{-1}$ . Streckad linje visar kvävgasens alveolära partialtryck, de två tunna linjerna den snabba och den långsamma vävnadens tension. Den tjocka linjen visar den medelsnabba vävnadens kvävetension.

I figur 4.6 illustreras kvävgasens tension i tre olika vävnader hos en dykare som tillbringat 20 min på ett djup av 30 m. Dykarens upp- och nedstigningshastighet var  $9 \text{ m min}^{-1}$ . En av vävnaderna har en halveringstid om 2 min och är alltså mycket snabb. Det är tydligt i figuren att denna snabba vävnad ganska kort efter uppstigningen är nästan helt utjämnad. Utjämnningen hinner dessutom påbörjas under uppstigningen. En av vävnaderna är långsam, med en halveringstid på 200 min. Under tidsperioden på botten hinner den långsamma vävnaden endast ta upp en bråkdel av den totala kvävgaslösande kapaciteten. Efter uppstigningen fortgår denna vävnads utjämnning mycket långsamt. Vävnaden med en halveringstid av 20 min hinner ta upp en avsevärd mängd kväve och blir en kort stund efter uppstigningen ledande.

Slutsatsen blir att kvävgastensionen i den snabba vävnaden efter uppstigning till stor del kontrolleras av uppstigningshastigheten. Endast efter mycket långa perioder på djup kommer kvävgastensionen i den långsamma vävnaden bli tillräckligt stor för att vara begränsande. Det är dock så att vid upprepad dykning utan mycket långa ytintervall kommer tensionen i den långsamma vävnaden att gradvis öka och så småningom (efter tillräckligt många perioder på djup) att bli betydelsefull. Eftersom de medelsnabba vävnaderna hastigt blir ledande är det också framförallt de som sätter begränsningar i dyktid och djup.

## Kapitel 5

# Begränsningar

Vid stor eller hastig trycksänkning finns risk för skador. När det totala omgivande (hydrostatiska) trycket sänks under en viss gräns går kvävgas ur lösning och bildar bubblor som under vissa betingelser kan växa och skada vävnader i kroppen. Detta kallas tryckfallssjuka.

I föregående avsnitt beskrevs hur kvävgas tas upp av kroppen och även hur kvävgasen utjämnas. Vid dykning eller andra aktiviteter under tryck tas kvävgas upp i kroppens vävnader. Det är önskvärt att hitta ett säkert sätt att återvända från djupet till ytan med godtyckligt liten (eller stor) risk för skador.

### 5.1 Tryckfallssjuka

En dykare som befunnit sig på botten tillräckligt länge för att kvävgas skall ha hunnit lösa sig i vävnader i en icke obetydlig mängd löper risk att efter uppstigning få *tryckfallssjuka*. Tryckfallssjuka, som även kallas *dykarsjuka* eller *kassunsjuka*, orsakas av att kvävgas som lösts i vävnader under förhöjt tryck efter trycksänkning återgår till gasform. När trycket sänks blir vävnader i kroppen övermättade (sektion 2.7). Om kvävgas hastigt tillåts återgå till gasform bildas bubblor i de övermättade vävnaderna. Bubblorna orsakar skador på vävnader i kroppen. Den vanligaste typen av tryckfallssjuka är muskuloskeletal tryckfallssjuka med smärtor i leder som armbågar, axlar, höfter, handleder och

Symptom	Andel [%]
Ledsmärta	89
Symptom i armen	70
Symptom i benen	30
Yrsel	5,3
Förlamning	2,3
Andnöd	1,6
Trötthet	1,3
Medvetlöshet	0,5

Tabell 5.1: Frekvens av symptom på tryckfallssjuka.

Typ (bubblornas läge)	Symptom
Muskuloskeletal (armbåge, axel, höft, handled, knä, ankel)	Lokal smärta, från mild till brutal. Ibland molande värk men sällan skarp smärta. Rörelse ger mer smärta. Smärtan kan ibland reduceras genom att böja leden och hitta komfortablare position.
Kutan (hud)	Klåda, vanligen runt öron, ansikte, nacke, armar och övre bål. Känsla av små insekter som rör sig över huden (myrkrypningar, dykarloppor). Fläckig, marmorerad hud, vanligen omkring axlar, övre bröst och buk. Svullnader i huden tillsammans med små ärrliknande gropar.
Neurologisk (hjärna)	Känselförändringar, stickningar, domningar, ökad känslighet. Förvirring eller minnesförlust. Synstörningar. Humörsvängningar eller beteendeförändringar. Kramper, medvetlöshet.
Neurologisk (ryggmärg)	Tilltagande svaghet eller förlamning i benen. Inkontinens. Tryckande känsla över bröst och/eller buk.
Konstitutionell (hela kroppen)	Huvudvärk. Oförklarlig trötthet. Sjukdomskänsla, diffus värk.
Audiovestibulär (inneröra)	Balansrubbningar Yrsel, svindel, illamående, kräkningar. Hörsselförlust.
Pulmonär (lungor)	Torrhosta, Andfåddhet. Brännande bröstsmärtor under bröstbenet, kraftigare vid andning.

Tabell 5.2: Tryckfallssjuka, olika typer av tryckfallssjuka, var bubblorna samlas och vilka symptom de orsakar.

knän (se tabell 5.1). Denna smärta kan vara alltifrån mild till outhärdlig. Vid svårare fall kan offret svårligen räta ut lederna och därav namnet *the bends* (eng. kröka, böja). Man talar om två typer av tryckfallssjuka, typ *I* och typ *II*, där typ *I* innefattar de lindrigare och medelsvåra symptomen (kutana och muskuloskeletal), se tabell 5.2. Typ *II* innefattar de svåra symptomen, framförallt neurologiska sådana. Tryckfallssjuka har diagnoskoden *T70.3* (ICD-10). Tryckfallssjuka inträffar vanligen inom en till några timmar efter uppstigning till ytan (trycksänkning), se tabell 5.3. Orsaken till tryckfallssjuka är bildandet av bubblor i vävnader i kroppen till följd av en minskning av det omgivande trycket. Det finns många faktorer som påverkar mottagligheten för tryckfallssjuka. Extrema djup, långa bottentider, hög uppstigningshastighet samt upprepad dykning är de faktorer som till störst grad ökar risken att få tryckfallssjuka. Ett flertal andra faktorer spelar också roll.

**Vätskebrist** Ordentlig hydrering antas vara fördelaktigt. Studier på piloter (som utsatts för trycksänkningar på hög höjd) har slagit fast att riskerna för tryckfallssjuka minskade efter vätskeintag.

Tidsrymd	Andel
[h]	[%]
< 1	42
< 3	60
< 8	83
< 24	98
< 48	100

Tabell 5.3: Tidsrymd inom vilken symptom för tryckfallssjuka inträffar.

**Temperatur** Det finns anledning att anta att risken för tryckfallssjuka ökar vid kyla.

**Konstitution** Fett löser kväve i mycket högre utsträckning än vatten och därför ökar riskerna att få tryckfallssjuka ju högre andel av kroppsvikten som är fett.

**PFO** *Patent Foramen Ovale* är en medfödd defekt i hjärtat. Alla har en öppning mellan hjärtats två förmak som hos de allra flesta sluts vid födseln. Hos vissa kvarblir öppningen och risken för tryckfallssjuka ökar eftersom venöst blod kan passera över på den arteriella sidan.

**Ålder** Högre ålder förefaller öka risken.

**Historia** Tidigare episoder med tryckfallssjuka anses öka risken att få det igen.

Vid statistiska studier[3] har man inte funnit några betydelsefulla kopplingar mellan förhöjd risk för tryckfallssjuka och astma, diabetes, hjärt- kärlsjukdomar, rökning eller BMI. Användning av nitrox och torrdräkt, ökad dykfrekvens under senaste året, ökad ålder, år sedan certifiering associerades med lägre risk för tryckfallssjuka. Ökad risk sågs vid ökat djup, tidigare episoder av tryckfallssjuka, antal dykdagar i följd och för män.

## 5.2 John och getterna

John Scott Haldane (1860–1936) var en skotsk fysiolog. Det brittiska amiralitetet gav 1906 Haldane uppdraget att studera kassunsjuka för att ta fram bättre dyktabeller. Haldane publicerade sina resultat[6] 1908 efter omfattande experiment med getter, som ju var lämpliga försöksdjur och fanns till hands i tillräcklig mängd. Haldane kom fram till sina resultat genom att placera försöksdjuren i en tryckkammare, utsätta dem för olika nivåer av förhöjt tryck under olika tidsperioder för att sedan hastigt sänka trycket och studera effekten.

Haldane upptäckte att getter kunde utsättas för ett tryck av ungefär 2,25 atm under obegränsat långa tidsperioder utan att få symptom efter hastig återkomst till normalt tryck (1 atm). Ökades trycket till strax över 2,25 atm uppstod emellanåt symptom och ju större tryck getterna utsattes för, desto oftare uppstod symptomen. Hastig dekompression efter en exponering på fyra timmar under ett tryck om 2,6 atm gav en get av 22 getter symptom på dykarsjuka. Ökades trycket till 2,7 atm fick två getter av 23 symptom, osv.

Under tryck (2,25 atm) löses kvävgas i vävnaderna på getterna (liksom på människor) och efter trycksänkning till 1 atm blir vävnaderna övermättade och kvävgas går ur lösning tillbaka i gasform. Haldane drog slutsatsen att getter (och människor) tål en trycksänkning från ca 2,25 atm till 1 atm, alltså ungefär en halvering.

Vid en sänkning av trycket kommer kvävgas löst i vävnaderna att utjämnas. Antag att en volym vatten  $V_v$ , befunnit sig under trycket  $p_0$  tillräckligt länge för att bli fullständigt mättad med kvävgas. Efter en hastig trycksänkning till trycket  $p_1$  blir lösningen övermättad och en viss volym kvävgas kommer att gå ur lösningen och återgå till gasform. Med hjälp av Henrys lag(2.5) och allmänna gaslagen (2.1) är det möjligt att beräkna mängden gas  $V_1$  som går ur lösning efter trycksänkning. Skillnaden i koncentration  $\Delta c$  i  $\text{mmol l}^{-1}$  ges av

$$\begin{aligned} p_0 &= K_H^{pc} c_0 \implies c_0 = \frac{p_0}{K_H^{pc}} \\ p_1 &= K_H^{pc} c_1 \implies c_1 = \frac{p_1}{K_H^{pc}} \\ \Delta c &= \frac{p_0 - p_1}{K_H^{pc}} \end{aligned} \quad (5.1)$$

skillnaden i molmassa ges sedan av  $\Delta n = \Delta c \cdot V_v$  och allmänna gaslagen (2.1) tillämpas vid trycket  $p_1$  för att få  $V_1$

$$\begin{aligned} p_1 V_1 &= \Delta n RT \\ V_1 &= \frac{RT V_v}{K_H^{pc}} \cdot \frac{p_0 - p_1}{p_1} \\ V_1 &= \left( \frac{p_0}{p_1} - 1 \right) \cdot \frac{RT V_v}{K_H^{pc}} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Om trycket halveras, alltså sänks från  $p_0$  till  $p_1 = p_0/2$  fås volymen  $V_1$  som gått ur lösningen ur (5.2) som

$$V_1 = 1 \cdot \frac{RT V_v}{K_H^{pc}} \quad (5.3)$$

Alltså, den volym kvävgas som går ur lösning vid en halvering av trycket är oberoende av start och sluttryck utan bestäms istället av kvoten mellan dessa,  $p_0/p_1$ . Det betyder att lika mycket gas kommer ur lösning när trycket halveras från, säg 4 bar till 2 bar som från 2 bar till 1 bar.

Haldane observerade alltså två mycket viktiga omständigheter. Först, att människan tål en trycksänkning från ungefär 2 atm till 1 atm, alltså en halvering, utan symptom på tryckfallssjuka. För det andra, att den mängd kvävgas som kommer ur lösning är lika stor oberoende av från vilket djup (tryck) halveringen skedde. I praktiken satte Haldane en gräns för hur stor vävnadstensionen  $p_t(t)$  kan tillåtas vara jämfört med det omgivande trycket  $P_{amb}$  utan att symptom på tryckfallssjuka uppkommer. Alltså, enligt Haldane skulle begränsningen vara att tensionen hos den i vävnaderna lösta kvävgasen aldrig fick överstiga halva det omgivande trycket. Haldane förutsatte dock att andningsgasen var luft och tog inte hänsyn till andelen kvävgas, dvs han antog att 100 % av andningsgasen orsakade tryckfallssjuka. I själva verket gäller (enligt Haldane) att

$$\frac{P_{amb}}{p_t(t)} > 2(1 - f_{O_2}) \quad (5.4)$$



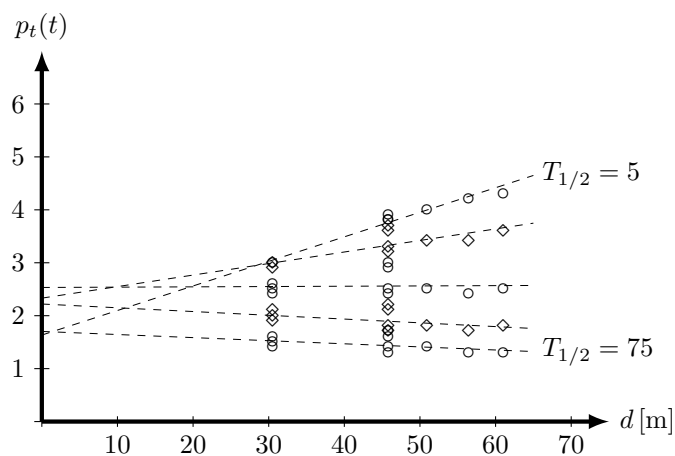
Serie	Djup [m]	$T_{1/2}$ [min]				
		5	10	20	40	75
2	30.5	3.0:1	2.9:1	2.4:1	1.9:1	1.4:1
7	30.5	3.0:1	2.9:1	2.5:1	1.9:1	1.5:1
9	30.5	3.0:1	3.0:1	2.5:1	2.0:1	1.5:1
11	30.5	3.0:1	3.0:1	2.6:1	2.1:1	1.6:1
10	45.8	3.8:1	3.2:1	2.4:1	1.7:1	1.3:1
3	45.8	3.8:1	3.3:1	2.5:1	1.8:1	1.4:1
8	45.8	3.8:1	3.3:1	2.5:1	1.8:1	1.4:1
16	45.8	3.9:1	3.6:1	2.9:1	2.1:1	1.6:1
15	45.8	3.9:1	3.7:1	3.0:1	2.2:1	1.7:1
4	50.9	4.0:1	3.4:1	2.5:1	1.8:1	1.4:1
5	56.4	4.2:1	3.4:1	2.4:1	1.7:1	1.3:1
6	61.0	4.3:1	3.6:1	2.5:1	1.8:1	1.3:1

Tabell 5.4: Övermättnadskvoter (partialtryck för kväve) utan vilka symptom på tryckfallsssjuka inträder enligt Hawkins, Shilling och Hansen[7].

Haldane gjorde fler betydande upptäckter, han beskrev hur mättnaden i vävnaderna (tensionen) följde en exponentiell kurva, han beskrev hur kroppens vävnader hade olika halveringstider och att kvävgasens mättnad följde en likadan process som kvävgasens utjämning. Han beskrev även hur en snabb och säker uppstigning skulle gå till, nämligen etappvis och med dekompressionsstopp. Det är Haldane som är den klassiska dekompressionsteorins fader.

### 5.3 M-värden

På 1930-talet företog Hawkins, Shilling och Hansen[7] en lång serie experiment. Under tre år genomfördes 2143 dyk indelade i 12 serier. Testerna utfördes på djupen 100, 150, 167, 185 och 200 fot. Testpersonerna placerades i en dyktank, exponerades för tryck under olika tidsperioder och utsattes sedan för en simulerad uppstigning genom en trycksänkning som motsvarade en uppstigningshastighet om  $15,2 \text{ m s}^{-1}$  ( $50 \text{ ft s}^{-1}$ ). Hawkins et al konstaterade för det första att de fem olika vävnadstyperna, med halvtiderna, 5, 10, 20, 40, och 75, inte hade samma maximala övermättnadskvot. Istället kunde exempelvis den snabbaste vävnadstypen tåla från 3,0 till 4,3 gångers skillnad mellan omgivande tryck och kvävgasens tension i vävnaden medan den långsammaste endast tolererade mellan 1,3 och 1,7 gångers skillnad (se tabell 5.4). För det andra föreföll djupet inverka på den maximala övermättnadskvoten. Detta är framförallt tydligt i de snabbaste vävnaderna där en övermättnadskvot av 4,3:1 kunde tolereras vid återkomst till ytan från ett djup av 61 m medan motsvarande tolerans endast var 3,0:1 vid återkomst till ytan från ett djup av 30 m. I figure 5.1 ses övermättnaden av kvävgas i vävnaderna vid återkomst till ytan plottade som funktion av exponeringen (djupet) med trendlinjer (minstakvadratanpassade) inlagda. Det förefaller som om de snabba vävnadstyperna klarar av en högre kvävgastension ju högre det omgivande trycket var under exponeringen. De långsammaste vävnaderna förefaller tolerera en lägre grad av kvävgastension ju



Figur 5.1: Övermättningen av kvävgas i vävnadstyperna vid återkomst till ytan efter uppstigning ( $15,2 \text{ m s}^{-1}$ ) plottad som funktion av exponeringen (hydrostatiskt tryck, [m]).

högre det omgivande trycket var.

Senare, under 1960-talet, på U. S. Navy Experimental Dive Unit (NEDU) analyserade Robert D. Workman resultaten från bland andra Hawkins, m fl, och beskrev en linjär ekvation[16] för hur den tillåtna övermättningen i vävnaderna förändrades med djupet. Workman kallade dessa övermättnadsgränser för maximalvärden, eller *M-värden*. Workmans modell innehöll åtta vävnadsgrupper med halveringstider från 5 min till 240 min.

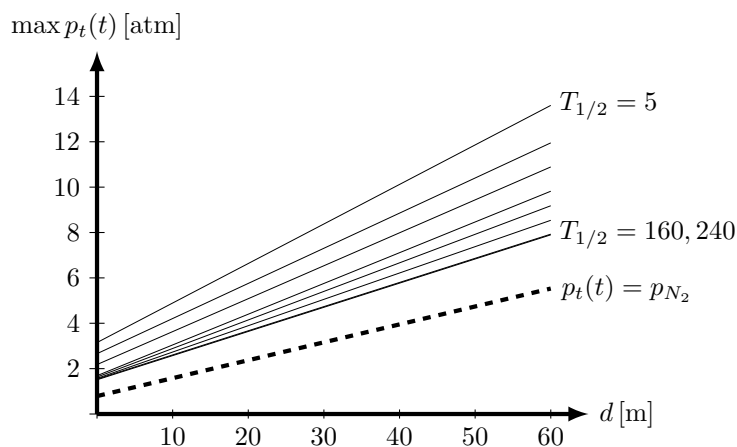
Workmans linjära ekvation

$$M = M_0 + \Delta M \cdot d \quad (5.5)$$

beskriver hur den maximala tillåtna tensionen  $M$  hos kvävgas löst i vävnaderna (partialtryck) beror av djupet  $d$ , eller det totala omgivande (hydrostatiska) övertrycket. Vid ytan, där djupet är 0 m och där det omgivande trycket är

$T_{1/2}$ [min]	$M_0$ [fsw]	$\Delta M$ [fsw fsw $^{-1}$ ]	$M_0$ [atm]	$\Delta M$ [atm atö $^{-1}$ ]
5	104	1,8	3,15	1,8
10	88	1,6	2,66	1,6
20	72	1,5	2,18	1,5
40	56	1,4	1,69	1,4
80	54	1,3	1,63	1,3
120	52	1,2	1,57	1,2
160	51	1,1	1,54	1,1
240	50	1,1	1,51	1,1

Tabell 5.5: Workmans M-värden för kvävgasens partialtryck i åtta olika vävnadstyper i fsw respektive fsw fsw $^{-1}$  och i atm respektive atm atö $^{-1}$  (1 atö är en atmosfärs övertryck).



Figur 5.2: Workmans M-värdeslinjer.

1 atm får de olika vävnadstypernas kvävgastension vara från 3,15 atm för den snabbaste vävnaden med 5 min halveringstid till 1,51 atm för den långsammaste med 240 min halveringstid. Det är även så att den tillåtna maximala kvävgastensionen för de olika vävnadstyperna ökar med ökat djup. Exempelvis, på 40 m djup där det omgivande trycket är 4,87 atm (1.6) får kvävgastensionen i vävnadstypen med en halveringstid på 20 min inte överstiga

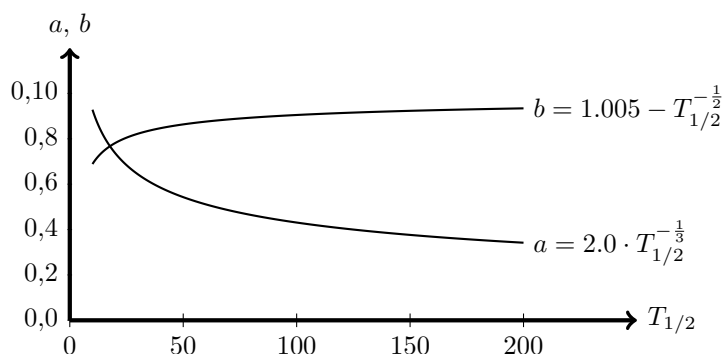
$$M = 2,18 + 1,5 \cdot 40 \cdot \frac{9806,38 \text{ Pa msw}^{-1}}{101\,325 \text{ Pa atm}^{-1}} = 7,96 \text{ atm} \quad (5.6)$$

eller

$$M = 2,18 + 1,5 \cdot (4,87 - 1) = 7,96 \text{ atm} \quad (5.7)$$

Workman föreslår en förklaring till varför de snabba vävnadstyperna tolererar en högre kvävgastension än de långsamma vävnaderna. En vävnadstyp med kort halveringstid kommer relativt sett utjämnas mycket snabbare än en vävnadstyp med lång halveringstid. Detta innebär att en vävnadstyp med kort halveringstid kommer att vara övermättad under en kortare tidsperiod. Samtidigt tar det en viss tid för kvävgasbubblor att bildas och växa till en sådan storlek att risk för tryckfallssjuka föreligger. Eftersom utjämningsförloppet i en vävnad med kort halveringstid går fort finns inte tillräckligt med tid för kvävgasbubblor att bildas och växa till betydelsefull storlek innan vävnadstensionen sjunkit till riskfria nivåer. I en långsam vävnad tar utjämnningen längre tid och bubblor av kvävgas hinner både bildas och växa till sådan storlek att risk för tryckfallssjuka uppstår. För att minska risken för tryckfallssjuka måste därför kvävgastensionen i de långsamma vävnadstyperna hållas på en lägre nivå än i de snabba vävnadstyperna. Det gäller alltså att *en kort tidsperiod med hög kvävgastension förmodligen är lika säker som en lång tidsperiod med lägre kvävgastension*.

Till detta kommer effekten av skillnader i kvävgasens löslighet i olika vävnader. I långsamma vävnader med stor kapacitet att lösa kvävgas kommer koncentrationen av kvävgas att vara hög. Vid en hastig reduktion av det omgivande, hydrostatiska trycket, ökar sannolikheten för att bubblor skall bildas jämfört med motsvarande sannolikhet i vävnader med lägre löslighet av kväve.



Figur 5.3: Bühlmanns  $a$ - och  $b$ -värden plottade för halveringstider från 1 till 200.

## 5.4 Bühlmann

Albert A. Bühlmann (1923–1994) var en schweizisk läkare verksam vid laboratoriet för hyperbarisk fysiologi vid universitetssjukhuset i Zürich, Schweiz.

Efter dykning i sjöar 1800 m över havet ådrog sig två av åtta schweiziska militärdykare tryckfallssjuka. Bühlmann insåg vilka problem dykning på hög höjd medförde och föreslog en metod för att beräkna maximal tillåten kvävgastension i vävnader vid en viss höjd över havet.

Bühlmann hade samma ansats som Workman, men eftersom Bühlmann intresserade sig för höghöjdsdykning hade han att ta i beaktande det faktiska lufttrycket ovanför vattenytan. Där Workman kunde förutsätta att lufttrycket ovan vattenytan alltid var 1 atm behövde Bühlmann bestämma hur det lägre lufttrycket på hög höjd inverkar på risken för tryckfallssjuka vid återkomst till ytan.

Bühlmann ansåg att det enda tillräckligt säkra sättet att bestämma toleransgränser för vävnadstypernas kvävgastension var genom experiment, att matematiskt härleda toleransgränserna var inte praktiskt möjligt. Därför genomförde Bühlmann flera serier med dykning på hög höjd med syfte att bestämma toleransgränserna för vävnadstyper med olika halveringstid.

Bühlmann kom fram till ett mycket elegant resultat. Det visade sig att ekvationen

$$p_t(t) \leq a + \frac{1}{b} P_{amb} \quad (5.8)$$

där

$$a = 2,0 \cdot T_{1/2}^{-\frac{1}{3}} \quad (5.9)$$

$$b = 1,005 - T_{1/2}^{-\frac{1}{2}} \quad (5.10)$$

mycket väl överensstämde med de empiriska resultat som erhållits vid försöksdykningar. Ekvation (5.8) beskriver alltså hur stor kvävgastensionen  $p_t(t)$  i en vävnad ( $t$ ) får vara vid det omgivande trycket  $P_{amb}$ . Konstanterna  $a$  och  $b$  finns plottade i figur 5.3. Där ses att konstanten  $a$  sjunker med stigande halveringstid och  $b$  närmar sig värdet 1,005 nerifrån. Vävnadstyper med kort

Nr	ZH-L16A, -B, -C		ZH-L16A	ZH-L16B	ZH-L16C
	$T_{1/2}$ [min]	b	a	a	a
1	4,0	0,5050	1,2599	1,2599	1,2599
1b	5,0	0,5578	1,1696	1,1696	1,1696
2	8,0	0,6514	1,0000	1,0000	1,0000
3	12,5	0,7222	0,8618	0,8618	0,8618
4	18,5	0,7825	0,7562	0,7562	0,7562
5	27,0	0,8126	0,6667	0,6667	0,6200
6	38,3	0,8434	0,5933	0,5600	0,5043
7	54,3	0,8693	0,5282	0,4947	0,4410
8	77,0	0,8910	0,4701	0,4500	0,4000
9	109,0	0,9092	0,4187	0,4187	0,3750
10	146,0	0,9222	0,3798	0,3798	0,3500
11	187,0	0,9319	0,3497	0,3497	0,3295
12	239,0	0,9403	0,3223	0,3223	0,3065
13	305,0	0,9477	0,2971	0,2850	0,2835
14	390,0	0,9544	0,2737	0,2737	0,2610
15	498,0	0,9602	0,2523	0,2523	0,2480
16	635,0	0,9653	0,2327	0,2327	0,2327

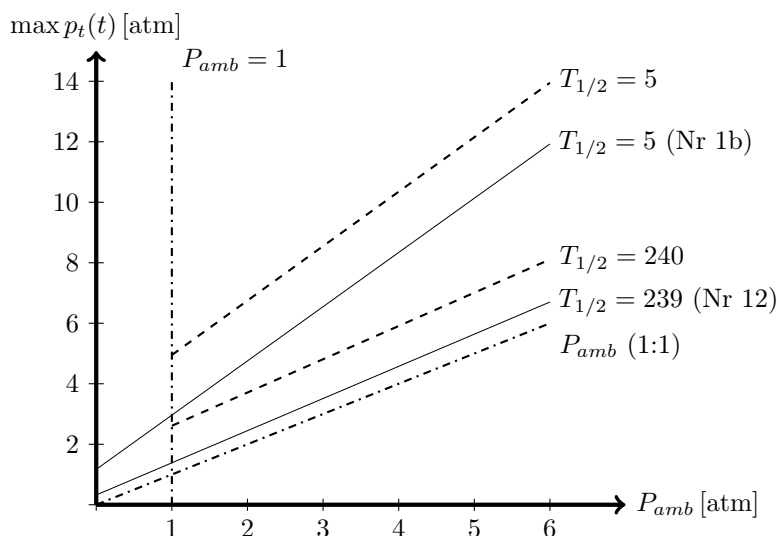
Tabell 5.6: Halveringstider,  $a$ - och  $b$ -konstanter för Bühlmann ZHL-16A, -B och -C.

halveringstid kommer därmed att ha högre toleransgränser medan långsamma vävnadstyper kommer att få avsevärt mycket lägre toleransgränser. Detta är helt i överensstämmande med vad exempelvis Workman kom fram till. Ekvationerna för Bühlmanns konstanter  $a$  och  $b$  är resultatet av kurvanpassning till experimentella data. Denna kurvanpassning är en approximation av det faktiska förhållandet. Eftersom den utgör en approximation är det så att för vissa vävnader (halveringstider) stämmer den bättre, för andra stämmer den sämre.

I boken *Tauchmedizin*[2] beskriver Bühlmann utförligt och förhållandevis lättillgängligt hur kroppen påverkas av kvävgas (inertgaser) och vilka toleransgränser som bör appliceras för olika vävnadstyper. Boken beskriver också hur hans algoritm tillämpas och hur den kan användas i en dykdator. Den har därför använts för flertalet implementationer och är en starkt bidragande orsak till populariteten hos Bühlmanns algoritm.

Bühlmann döpte sin uppsättning halveringstider och konstanter till *ZH-L16* efter *Zhürich Limits* och antalet halveringstider (16) samt en versionsbokstav (A, B eller C). A-uppsättningen är endast teoretisk, den ges helt och hållet av ekvation (5.8). För utveckling av dyktabeller har den teoretiska uppsättningen konstanter modifierats för att vara en smula mer konservativa i de medel-snabba vävnadstyperna 6, 7 och 8.  $a$ -konstanten för dessa tre vävnadstyper har reducerats med ungefär 5,6, 6,3 respektive 4,3 procent vardera. Detta utgör uppsättningen ZHL-16B.

För användning i dykdatorer har den teoretiska uppsättningen modifierats ytterligare för ökad konservatism.  $a$ -konstanten för vävnadstyperna 5 till och med 15 har reducerats med 7,00, 15,0, 16,5, 14,9, 10,4, 7,85, 5,78, 4,90, 4,58, 4,64 respektive 1,70 procent vardera. Denna uppsättning kallas ZHL-16C.

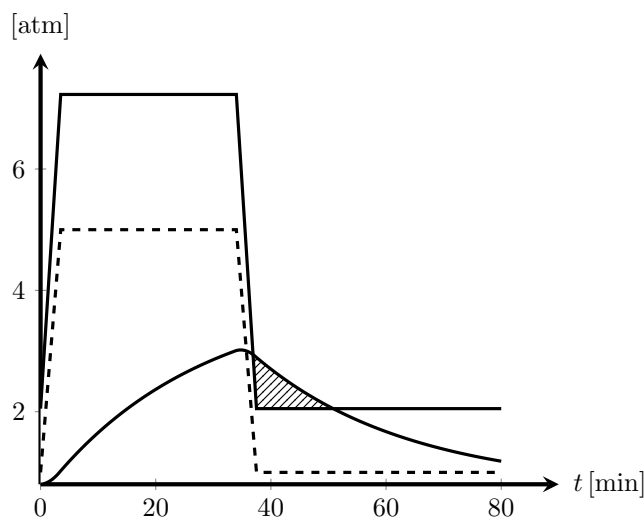


Figur 5.4: Jämförelse mellan Workmans M-värdeslinjer och Bühlmanns toleransgränser. M-värdeslinjer är streckade och Bühlmanns toleransgränser heldragna.

I figur 5.4 jämförs Workmans M-värdeslinjer med Bühlmanns toleransgränser för inertgas. Det är tydligt att Bühlmanns gränser är mer konservativa än Workmans. Samtidigt är det också uppenbart att förändringen med djupet (det omgivande, hydrostatiska trycket) för vävnadstyper med jämförbara halveringstider överensstämmer väl mellan Bühlmanns gränser och Workmans gränser. I figur 5.5 ses kvävgastensionen i vävnaden med halveringstiden 18,5 min för ett dyk med upp- och nedstigningshastigheten  $10 \text{ m min}^{-1}$  och en bottentid om 30 min på djupet 40 m (den nedre solida linjen). Den streckade linjen representerar det omgivande trycket, den övre heldragna linjen beskriver den maximala tolererade kvävgastensionen för 18,5 min vävnaden. Vid omkring 36 min överskrider vävnadens kvävgastension toleransgränsen och risk för tryckfallssjuka föreligger (det streckade området).

## 5.5 Gradientfaktorer

Workman och Bühlmann bestämmer var för sig den maximala kvävgastensionen som olika vävnader i kroppen kan tolerera. Workman använder ekvation (5.5), alltså  $M = M_0 + \Delta M \cdot d$  och Bühlmann använder ekvation (5.8), alltså  $p_{tmax}(t) = a + 1/b \cdot P_{amb}$ . I sin bok uttrycker Bühlmann att ett stort mått av försiktighet bör iakttagas vad gäller de bestämda toleransgränserna. Gränserna beskriver inte ett förhållande sådant att överskridande av gränserna alltid medför tryckfallssjuka, eller, än viktigare, det är inte så att risken för tryckfallssjuka är obefintlig om toleransgränserna inte överskrids. Tvärtom, är det så att ett flertal omständigheter påverkar risken, däribland individuella olikheter, riskfaktorer såsom djup, temperatur, ålder. Även exempelvis dagsform, kosthållning och hydreringsnivå påverkar.



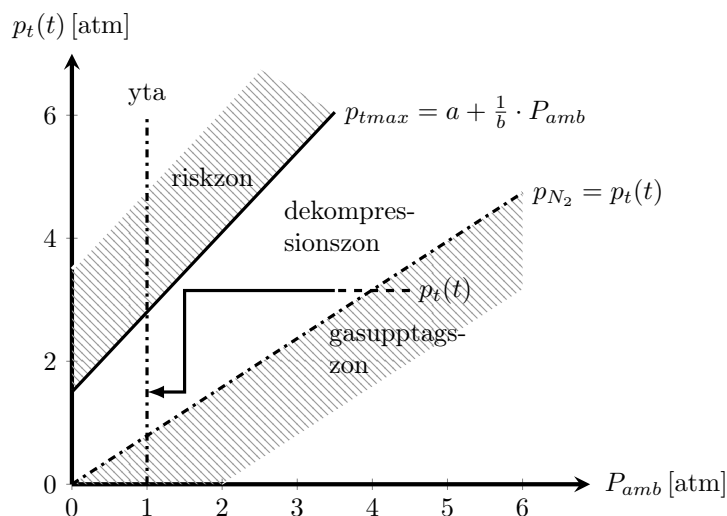
Figur 5.5: Kvävgastension i vävnadstypen med halveringstid 18,5 min (heldragen linje). Streckad linje representerar totalt omgivande tryck ( $P_{amb}$ ). Övre heldragen linje visar maximalt tolererad kvävgastension i 18,5 min vävnaderna.

Bühlmanns toleransgränser bestämmer alltså en empirisk, statistisk gräns för vilken risken för tryckfallssjuka ökar till en oacceptabel nivå om den över-skrids. För att minska riskerna orsakade av individuell variation och inverkan av varierande osäkerhetsfaktorer bör toleransgränserna reduceras med en ytterligare säkerhetsmarginal.

I figur 5.6 ses de tre viktiga områdena, riskzonen, dekompressionzonen och gasupptagszonen. I figuren beskrivs hur en vävnads kvävgastension  $p_t(t)$  förhåller sig till det omgivande trycket  $P_{amb}$ . Linjen  $p_t(t)$  beskriver kvävgastensionen i en godtycklig vävnad hos en dykare som stiger upp från ett djup av ca 35 m, gör ett säkerhetsstopp vid 5 m för att sedan stiga upp till ytan. Under säkerhetsstoppet utjämnas tensionen i vävnaden. Det är dock tydligt att dykaren inte hade kunnat göra en direktuppstigning till ytan utan att hamna i riskzonen.

Om kvävgastensionen är lägre än kvävgasens partialtryck i omgivningen, alltså under linjen  $p_{N_2}$ , så kommer mängden löst kvävgas i vävnaden att öka (vävnaden tar upp kvävgas). För att säkert återkomma till ytan måste en dykare utjämna kvävgastensionen i vävnaden genom stiga till ett djup där det omgivande partialtrycket hos kvävgasen är lägre än kvävgastensionen i vävnaden. Om det omgivande (totala) trycket sänks för mycket uppträder risk för tryckfallssjuka (bubblor) och dykaren befinner sig i riskzonen, alltså ovanför linjen  $p_{tmax}$  i figur 5.6.

För att utjämna kvävgastensionen i vävnaden måste dykaren placera sig i dekompressionszonen (se figur 5.6). Ju närmare linjen  $p_{tmax}$  desto större risk att osäkerhetsfaktorerna påverkar utjämningen till sådan grad att tryckfallssjuka uppstår. Å andra sidan är det så att ju närmare linjen  $p_{N_2}$  dykaren placerar sig desto långsammare går utjämningen, att befinna sig djupt under vattenytan under lång tid utgör också en risk.



Figur 5.6: Gasupptagszon, riskzon och dekompressionszon.

Det är önskvärt att införa någon form av ytterligare säkerhetsmarginal för att begränsa inverkan av osäkerhetsfaktorer till en hyggligt riskfri nivå.

## 5.6 En gradientfaktor

I figur 5.7 visas två godtyckliga linjer,  $y_0$  och  $y_1$ , som har ekvationerna

$$y_0(x) = m_0 + k_0x \quad (5.11)$$

$$y_1(x) = m_1 + k_1x \quad (5.12)$$

där syns också linjen  $y_f$  som ligger mellan linjerna  $y_0$  och  $y_1$ . Linjen  $y_f$  representerar en linje som ligger på en andel,  $f$  av avståndet mellan  $y_0$  och  $y_1$ . Ju större  $f$  är desto närmare linjen  $y_1$  är linjen  $y_f$ . Alltså, vid alla punkter längs  $y_f(x)$  gäller att

$$y_f(x) = y_0(x) + f(y_1(x) - y_0(x)) \quad (5.13)$$

Eftersom  $y_0$  och  $y_1$  ges av ekvationerna (5.11) och (5.12) gäller alltså

$$\begin{aligned} y_f &= y_0 + f(y_1 - y_0) \\ &= m_0 + k_0x + f(m_1 + k_1x - m_0 - k_0x) \\ &= (1 - f)m_0 + fm_1 + [(1 - f)k_0 + fk_1]x \end{aligned} \quad (5.14)$$

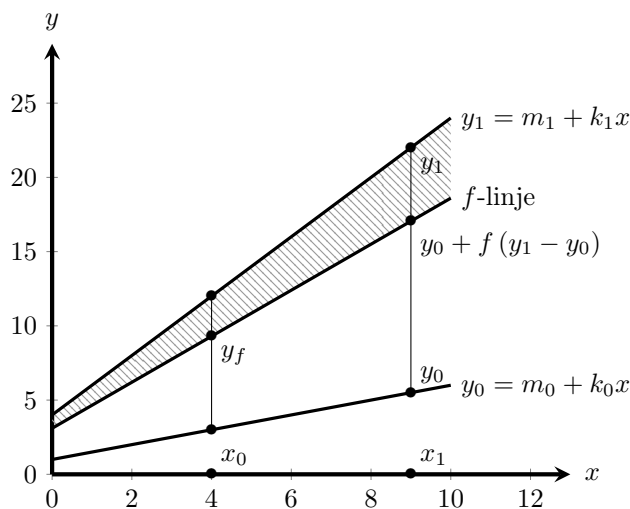
och för linjen  $y_f = m_f + k_fx$  fås alltså

$$m_f = (1 - f)m_0 + fm_1 \quad (5.15)$$

$$k_f = (1 - f)k_0 + fk_1 \quad (5.16)$$

Om  $f = 1$  blir linjen  $y_f(x) = y_1(x)$  och om  $f = 0$  blir  $y_f(x) = y_0(x)$ . Genom definitionen av linjen  $y_f$  erhålls alltså en relativ marginal,  $f$ , till linjen  $y_1$ .





Figur 5.7: Linjen  $y_f = (1 - f)m_0 + fm_1 + ((1 - f)k_0 + fk_1)x$ , där  $y_f$  alltid är en andel,  $f$ , av avståndet mellan linjerna  $y_0$  och  $y_1$ .

Genom att låta linjen  $y_0$  representeras av det omgivande partialtrycket för kvävgas, dvs  $y_0 = f_{N_2}P_{amb}$  och låta  $y_1$  representera toleransgränsen för en vävnad, dvs  $y_1 = a + 1/b \cdot P_{amb}$  är det nu enkelt att med ovanstående resonemang införa en *gradientfaktor*.

Bestäm att gradientfaktorn  $G_F$  utgör storleken av den andel av Bühlmanns toleransgräns för kvävgasens partialtryck i vävnaderna som skall användas. Den nya så definierade toleransgränsen blir då

$$m_{G_F} = G_F a \quad (5.17)$$

$$k_{G_F} = (1 - G_F) f_{N_2} + G_F \frac{1}{b} \quad (5.18)$$

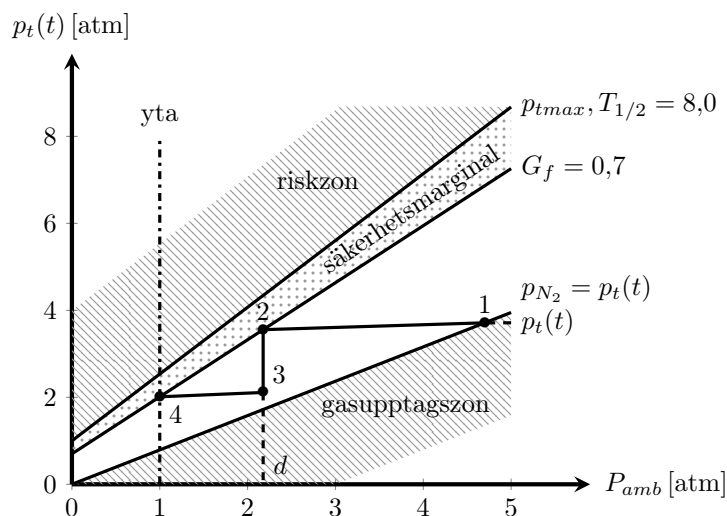
och

$$y_{G_F}(P) = G_F a + \left[ (1 - G_F) f_{N_2} + G_F \frac{1}{b} \right] P \quad (5.19)$$

För luft, med en kväveandel av  $f_{N_2} = 0,79$  och med en gradientfaktor  $G_F = 0,7$  blir toleransgränsen för vävnaden med halveringstiden  $T_{1/2} = 8$  min enligt ekvation (5.19) och tabell 5.6

$$\begin{aligned} y_{G_f}(P) &= 0,7 \cdot 1,000 + \left[ (1 - 0,7) \cdot 0,79 + 0,7 \cdot \frac{1}{0,6514} \right] P \\ y_{G_f}(P) &= 0,7 + 1,3116 \cdot P \end{aligned} \quad (5.20)$$

I figur 5.8 är kvävgastensionen  $p_t(t)$  plottad mot det totala omgivande trycket  $P_{amb}$ . En dykare gör en uppstigning från djupet, med kvävgastensionen i vävnadstypen som beskrivs av halveringstiden  $T_{1/2} = 8,0$  ritad som den heldragna linjen  $p_t(t)$ . Vid punkten 1 lämnar dykaren den djupaste delen av dyket och går in i dekompressionszonen. Efter passage av punkten 1 tar vävnadstypen inte längre upp gas utan utjämnas istället. Vid punkten 2 har dykaren nått gränsen för



Figur 5.8: Uppstigning och dekompressionsstopp med säkerhetsmarginal ( $G_F = 0,7$ ).

den maximala utjämningshastigheten, alltså vid djupet  $d$  är skillnaden mellan den omgivande kvävgasens partialtryck och kvävgasens partialtryck i den aktuella vävnadstypen så stor som säkerhetsmarginalen tillåter. Dykaren hejdar uppstigningen och stannar kvar medan kvävgastensionen i vävnaderna utjämnas (punkt 3). Efter en tids uppehåll har kvävgastensionen sjunkit till en sådan nivå att uppstigning till ytan är möjlig (punkt 4). Det är viktigt att inse att med denna definition av gradientfaktorn är säkerhetsmarginalen, i absoluta tal, större på djupet än vid ytan.

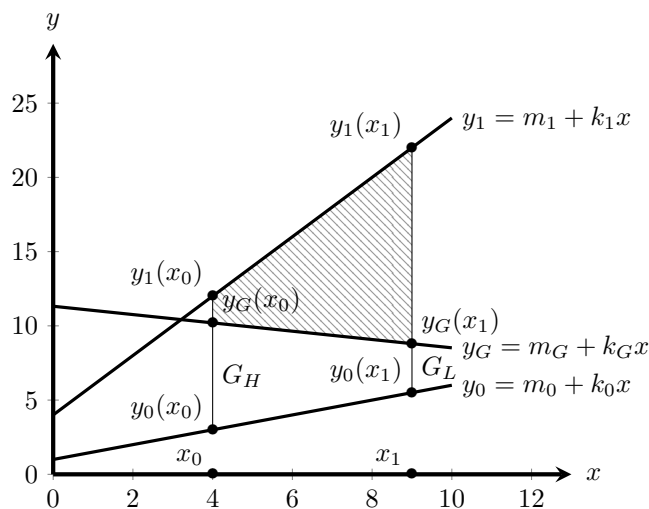
## 5.7 Två gradientfaktorer

Det är i många fall önskvärt att använda en säkerhetsmarginal för den djupa delen av ett dyk och en annan för den grunda delen. Säkerhetsmarginalen för den djupa delen kommer då att bestämma vid vilket djup det första dekompressionsstoppet hamnar. Marginalen för den grunda delen bestämmer då den största tolererade kvävgastensionen i vävnaderna vid ytan och indirekt alltså längden på de sista dekompressionsstoppen.

I figur 5.9 ses de tre linjerna  $y_0(x)$ ,  $y_1(x)$  och  $y_G(x)$ . Antag att de två gradientfaktorerna är  $G_L$  och  $G_H$  ( $L$  för *low* och  $H$  för *high*). Gradientfaktorn  $G_L$  bestämmer alltså vilken andel av avståndet mellan linjerna  $y_0$  och  $y_1$  vid punkten  $x_1$  som skall vara säkerhetsmarginal. På samma sätt bestämmer  $G_H$  vilken andel av avståndet mellan linjerna  $y_0$  och  $y_1$  som skall vara säkerhetsmarginal vid punkten  $x_0$ . Lutningen hos linjen  $y_G$  ges av

$$k_G = \frac{y_G(x_1) - y_G(x_0)}{x_1 - x_0} \quad (5.21)$$

där  $y_G(x_0)$  och  $y_G(x_1)$  ges på samma sätt som ekvation (5.13) i sektion 5.6 men



Figur 5.9: Linjen  $y_G(x)$ , med  $G_L = 0,2$  och  $G_H = 0,8$ .

med olika gradientfaktorer,  $G_H$  och  $G_L$ .

$$y_G(x_0) = (1 - G_H)y_0(x_0) + G_H y_1(x_0) \quad (5.22)$$

$$y_G(x_1) = (1 - G_L)y_0(x_1) + G_L y_1(x_1) \quad (5.23)$$

Uttrycket för  $k_G$  är enkelt att härleda ur ekvationerna (5.21), (5.22) samt (5.23) men blir en smula kvistigt. Börja med att bestämma  $y_G(x_1) - y_G(x_0)$

$$\begin{aligned} y_G(x_1) - y_G(x_0) &= (1 - G_L)y_0(x_1) - (1 - G_H)y_0(x_0) \\ &\quad + G_L y_1(x_1) - G_H y_1(x_0) \\ &= (1 - G_L)(m_0 + k_0 x_1) - (1 - G_H)(m_0 + k_0 x_0) \\ &\quad + G_L(m_1 + k_1 x_1) - G_H(m_1 + k_1 x_0) \\ &= (m_1 - m_0)(G_L - G_H) \\ &\quad + x_1((1 - G_L)k_0 + G_L k_1) \\ &\quad - x_0((1 - G_H)k_0 + G_H k_1) \end{aligned} \quad (5.24)$$

sedan kan  $k_G$  skrivas enligt ekvation (5.21) som

$$\begin{aligned} k_G &= \frac{(m_1 - m_0)(G_L - G_H)}{x_1 - x_0} \\ &\quad + \frac{x_1((1 - G_L)k_0 + G_L k_1)}{x_1 - x_0} \\ &\quad - \frac{x_0((1 - G_H)k_0 + G_H k_1)}{x_1 - x_0} \end{aligned} \quad (5.25)$$

och  $m_G$  ges av ekvation (5.22)

$$m_G = (1 - G_H)y_0(x_0) + G_H y_1(x_0) - k_G x_0 \quad (5.26)$$

Med hjälp av de två uttrycken (5.25) och (5.26) kan  $y_G(x)$  skrivas på formen

$$y_G(x) = m_G + k_G x \quad (5.27)$$

vilket är okomplicerat med mödosamt, därför lämnas det fullständiga uttrycket för  $y_G(x)$  som övning åt läsaren. Nedan bestäms  $y_G$  istället numeriskt.

Gradientfaktorn som infördes i förra avsnittet (5.6) är genom sin definition giltig för alla djup. Införs istället två gradientfaktorer gäller inte den behändiga relationen att för alla  $G_f$  sådana att  $0 \leq G_f \leq 1$  gäller alltid att

$$y_0(x) \leq y_G(x) \leq y_1(x) \quad (5.28)$$

För två gradientfaktorer ligger linjen för säkerhetsmarginalen inte nödvändigtvis mellan linjerna  $y_0(x)$  och  $y_1(x)$ . Istället är det så att för  $G_L$  och  $G_H$  sådana att  $0 \leq G_L \leq 1$  och  $0 \leq G_H \leq 1$  gäller ekvation (5.28) åtminstone för  $x$  där  $x_0 \leq x \leq x_1$  men inte nödvändigtvis för alla  $x$ .

På samma sätt som i avsnitt 5.6 ovan sätts linjen  $y_0$  till det omgivande partialtrycket hos kvävgasen, dvs

$$y_0(P) = (1 - f_{O_2})P \quad (5.29)$$

och linjen  $y_1$  bestäms till Bühlmanns toleransgräns för vävnadstypen 2 med en halveringstid om 8,0 min, alltså

$$y_1(P) = a_2 + 1/b_2 \cdot P \quad (5.30)$$

där  $a_2 = 1,0000$  och  $b_2 = 0,6514$  (tabell 5.6). Gradientfaktorerna sätts till  $G_H = 0,7$  och  $G_L = 0,3$ . Det är önskvärt att  $G_H$  är säkerhetsmarginalen vid ytan ( $x_0 = 1,0$ ) därför gäller

$$\begin{aligned} y_G(x_0) &= (1 - G_H)y_0(x_0) + G_H y_1(x_0) \\ y_G(1,0) &= (1 - 0,7)(1 - 0,21) \cdot 1,0 + 0,7 \cdot \left(1,0000 + \frac{1}{0,6514} \cdot 1,0\right) \\ y_G(1,0) &= 2,0116 \end{aligned} \quad (5.31)$$

Vid första stoppet  $x_1 = P_1$  är säkerhetsmarginalen  $G_L = 0,3$  och  $y_G(x_1)$  blir

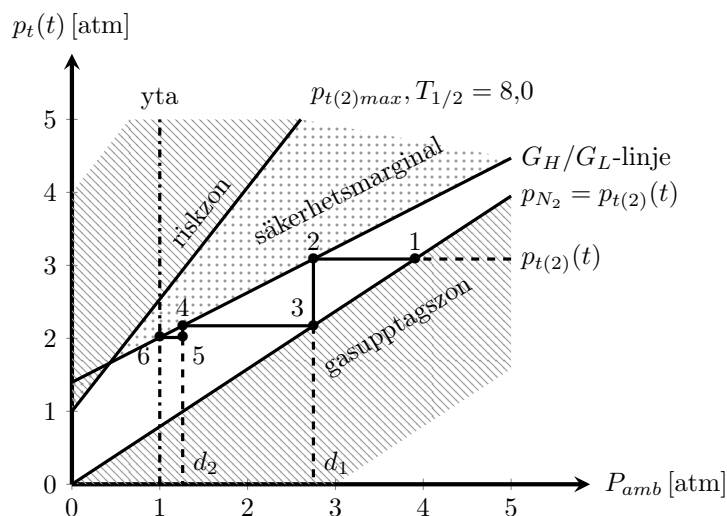
$$\begin{aligned} y_G(x_1) &= (1 - G_L)y_0(x_1) + G_L y_1(x_1) \\ y_G(P_1) &= (1 - 0,3)(1 - 0,21) \cdot P_1 + 0,3 \cdot \left(1,0000 + \frac{1}{0,6514} \cdot P_1\right) \\ y_G(P_1) &= 0,3 + 1,0135 \cdot P_1 \end{aligned} \quad (5.32)$$

och  $k_G$  fås ur ekvation (5.21) som

$$k_G = \frac{1,0135 \cdot P_1 - 1,7116}{P_1 - 1,0} \quad (5.33)$$

Även  $m_G$  kan nu bestämmas med hjälp av ekvationerna (5.26), (5.31) och (5.33)

$$\begin{aligned} m_G &= 2,0116 - \frac{1,0135 \cdot P_1 - 1,7116}{P_1 - 1,0} \cdot 1,0 \\ &= \frac{0,9981 \cdot P_1 - 0,3}{P_1 - 1,0} \end{aligned} \quad (5.34)$$



Figur 5.10: Uppstigning och dekompressionsstopp med två gradientfaktorer  $G_L = 0,7$  och  $G_H = 0,3$ .

Linjen för säkerhetsmarginalen  $y_G(P)$  blir alltså, enligt ekvation (5.34) och (5.33)

$$y_G(P) = \frac{0,9981 \cdot P_1 - 0,3 + (1,0135 \cdot P_1 - 1,7116) \cdot P}{P_1 - 1,0} \quad (5.35)$$

För att beräkna det första stoppet ( $P_1$ ) och göra ekvation (5.35) fullständigt bestämd är det nödvändigt att känna till kvävgasens tension i den aktuella vävnadstypen, i detta exempel vävnadstyp två, alltså  $p_{t(2)}(t)$ .

I följande förenklade exempel studeras en dykare som befunnit sig på ett djup av 30 m och andats luft ( $f_{O_2} = 0,21$ ) under tillräckligt lång tid för att kvävgastensionen i vävnadstyp 2 skall ha fullständigt mättats till samma nivå som det omgivande partialtrycket hos kvävgasen. Dykaren har då en tension i vävnadstyp 2 som motsvarar kvävgasens partialtryck i alveolerna på djupet 30 m. Enligt ekvation (1.6) är det omgivande trycket på djupet 30 m

$$P_{amb} = 1,01325 + 30 \cdot 0,098063 = 3,9551 \text{ atm} \quad (5.36)$$

och enligt ekvation (4.57) är då kvävgasens partialtryck i alveolerna

$$p_{X_{N_2}} = 0,79 (3,9551 - 0,04796) = 3,0866 \text{ atm} \quad (5.37)$$

och eftersom dykaren har tillbringat tillräcklig tid på djupet för att hinna mäta vävnadstypen i fråga med kvävgas gäller att  $p_{t(2)}(t) = p_{X_{N_2}} = 3,0866 \text{ atm}$ . Antag att dykaren rör sig så snabbt att kvävgastensionen i vävnadstypen inte hinner ändras under färden uppåt. Det omgivande trycket vid det första stoppet  $P_1$  ges då av ekvation (5.32), alltså

$$\begin{aligned} p_{t(2)}(t) &= y_G(P_1) \\ 3,0866 &= 0,3 + 1,0135 \cdot P_1 \\ P_1 &= 2,7495 \text{ atm} \end{aligned} \quad (5.38)$$

Detta värde på  $P_1$  motsvarar enligt ekvation (1.6) ett djup av

$$d = \frac{P_1 - 1,013\,25}{0,098\,063} = 17,7 \text{ m} \quad (5.39)$$

och ekvation (5.35) kan fullständigt bestämmas

$$\begin{aligned} y_G(P) &= \frac{2,4443 + 1,0750 \cdot P}{1,7495} \\ &= 1,3971 + 0,6145 \cdot P \end{aligned} \quad (5.40)$$

Nu är det möjligt att rita  $p_{t(2)max}$ ,  $p_{N_2}$ ,  $p_{t(2)}(t)$  och  $y_G(P)$  i ett diagram. På liknande sätt som i föregående avsnitt (5.6) är i figur 5.10 kvävgastensionen i vävnadstypen med en halveringstid  $T_{1/2} = 8,0$  min inritad. Istället för en gradientfaktor, används i figur 5.10 två gradientfaktorer,  $G_H = 0,7$  och  $G_L = 0,3$ .

En dykare gör en uppstigning från ett djup av 30 m och går i punkt 1 in i dekompressionszonen. Dykaren fortsätter upp till punkt 2 där säkerhetsmarginalen är 30 % av avståndet mellan Bühlmanns toleransgräns och partialtrycket hos den omgivande kvävgasen. Här stannar dykaren tills kvävgastensionen i vävnadstypen sjunkit till en sådan nivå att fortsatt uppstigning är lämplig (punkt 3). Dessvärre har kvävgasen fortfarande inte utjämnats tillräckligt mycket för att uppstigning till ytan skall vara möjlig utan ytterligare ett dekompressionsstopp är nödvändigt (punkt 4). Vid punkt 4 är dykaren förhållandevis nära ytan (2,66 m) och säkerhetsmarginalen är nära  $G_H$ , dvs närmare 70 % än 30 %. Efter en kort stund har kvävgastensionen utjämnats till en sådan nivå att uppstigning till ytan är möjlig (punkt 5 och 6).

# Appendix A

## Matematisk bakgrund

### A.1 Kontinuitet

Vi säger att en funktion  $f(x)$  är kontinuerlig i punkten  $x$  om det för alla  $\epsilon > 0$  existerar ett  $\delta > 0$  sådant att  $|x - y| < \delta$  implicerar att  $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ , alltså

$$\forall \delta > 0, \exists \epsilon > 0 : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon \quad (\text{A.1})$$

Vi säger att funktionen  $f$  är kontinuerlig i intervallet  $[a, b]$  om den är kontinuerlig i alla punkter i intervallet, dvs

$$\forall x, y \in [a, b], \forall \epsilon < 0, \exists \delta > 0 : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon \quad (\text{A.2})$$

### A.2 Derivata

Derivatans av en funktion definieras

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (\text{A.3})$$

Vi skriver ofta  $df(x)/dx$  som alltså är ekvivalent med  $f'(x)$  där derivering med avseende på  $x$  är underförstått.

En funktion  $f$  är *deriverbar* i  $x$  om  $f$  är definierad i omgivningen av  $x$  och om gränsvärdet  $A$  i

$$A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (\text{A.4})$$

existerar.

Om vi bildar  $\rho(x, h)$  som

$$\rho(x, h) = \frac{1}{h} (f(x+h) - f(x)) \quad (\text{A.5})$$

och definierar  $\rho(x, 0) = 0$  så blir  $\rho(x, h)$  kontinuerlig i 0 och vi kan skriva

$$(A + \rho(x, h))h = f(x+h) - f(x) \quad (\text{A.6})$$

som utgör en alternativ formulering av (A.4).

### A.3 Integral

En funktion  $F$  är en *primitiv funktion* till  $f$  om  $f$  är derivata till  $F$ , alltså

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \quad (\text{A.7})$$

*Integralen* av en funktion  $f$ , beroende av variabeln  $x$ , och kontinuerlig på intervallet  $[a, b]$  definieras som

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (\text{A.8})$$

Där  $F$  är en primitiv funktion till  $f$ . Vi skriver ofta  $[F(x)]_a^b$  istället för  $F(b) - F(a)$

### A.4 Fundamentalsatsen

Antag att funktionen  $F(x)$  är *kontinuerlig* i intervallet  $[a, b]$  och definiera

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, a \leq x \leq b \quad (\text{A.9})$$

Då gäller, enligt *analysens fundamentalsats* att funktionen  $F$  är deriverbar och  $F$ 's derivata är  $f$  inom intervallet  $[a, b]$ . Alltså

$$F'(x) = f(x), x \in (a, b) \quad (\text{A.10})$$

Det gäller även att om  $G(x)$  är en primitiv funktion till  $f$  så är  $G$  integralen av  $f$ , enligt

$$G(x) = G(a) + \int_a^x f(t)dt, x \in [a, b] \quad (\text{A.11})$$

För att bevisa fundamentalsatsen, betrakta definitionen av derivata (A.3)

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \quad (\text{A.12})$$

Med definitionen av  $F$  (A.9) kan vi skriva

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right) \quad (\text{A.13})$$

men detta är ju

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt \quad (\text{A.14})$$

Integralkalkylens medelvärdesats ger att om  $f$  är kontinuerlig på det slutna intervallet  $[a, b]$  så finns en punkt  $c \in [a, b]$  sådan att

$$\int_a^b f(t)dt = f(c)(b-a) \quad (\text{A.15})$$



Så, om vi låter  $c \in [x, x+h]$  kan vi skriva

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(c)(x+h-x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(c) \quad (\text{A.16})$$

Men då  $h$  går mot 0 måste  $c$  gå mot  $x$  och vi får

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(c) = \lim_{c \rightarrow x} f(c) = f(x) \quad (\text{A.17})$$

eftersom  $f$  är kontinuerlig.

## A.5 Partiell integration

För att beräkna en integral vars integrand är en produkt av två funktioner används *partinell integration* enligt

$$\int f(x)g(x)dx = [F(x)g(x)] - \int F(x)g'(x)dx \quad (\text{A.18})$$

För att visa (A.18) använder vi oss inledningsvis av analysens fundamentalsats (A.10) för att skriva

$$[F(x)g(x)]_a^b = \int_a^b (F(x)g(x))' dx \quad (\text{A.19})$$

och med stöd av produktregeln (A.25) och att  $F'(x) = f(x)$  kan vi skriva

$$\int_a^b (F(x)g(x))' dx = \int_a^b F'(x)g(x) + F(x)g'(x)dx \quad (\text{A.20})$$

och eftersom  $F'(x) = f(x)$  kan vi skriva

$$\int_a^b F'(x)g(x) + F(x)g'(x)dx = \int_a^b f(x)g(x) + \int_a^b F(x)g'(x)dx \quad (\text{A.21})$$

Vi har då från (A.19) och (A.21) att

$$[F(x)g(x)]_a^b = \int_a^b f(x)g(x) + \int_a^b F(x)g'(x)dx \quad (\text{A.22})$$

och kan möblera om för att få

$$\int_a^b f(x)g(x) = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx \quad (\text{A.23})$$

## A.6 Derivata av produkt

Produkten av två funktioner

$$f(x) = g(x)h(x) \quad (\text{A.24})$$

har derivatan

$$f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) \quad (\text{A.25})$$

Vi använder derivatans definition (A.3) och ser att

$$g'(x) = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{g(x+d) - g(x)}{d} \quad (\text{A.26})$$

$$h'(x) = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{h(x+d) - h(x)}{d} \quad (\text{A.27})$$

och får då  $f'(x)$  som

$$f'(x) = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{f(x+d) - f(x)}{d} = \frac{g(x+d)h(x+d) - g(x)h(x)}{d} \quad (\text{A.28})$$

Men, om vi definierar  $\Delta g(x) = g(x+d) - g(x)$  och  $\Delta h(x) = h(x+d) - h(x)$  kan vi skriva

$$f'(x) = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{(g(x) + \Delta g(x))(h(x) + \Delta h(x)) - g(x)h(x)}{d} \quad (\text{A.29})$$

om vi expanderar ovanstående får vi

$$f'(x) = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{g(x)h(x) + g(x)\Delta h(x) + \Delta g(x)h(x) + \Delta g(x)\Delta h(x) - g(x)h(x)}{d} \quad (\text{A.30})$$

som kan skrivas

$$\lim_{d \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x)}{d} h(x) + \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\Delta h(x)}{d} g(x) + \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x)\Delta h(x)}{d} \quad (\text{A.31})$$

men detta är samma sak som

$$g'(x)h(x) + h'(x)g(x) + \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x)\Delta h(x)}{d} \quad (\text{A.32})$$

Vi betraktar sista termen i ovanstående uttryck och ser att

$$\lim_{d \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x)\Delta h(x)}{d} = \lim_{d \rightarrow 0} g'(x)\Delta h(x) = g'(x) \lim_{d \rightarrow 0} \Delta h(x) \quad (\text{A.33})$$

Men från definitionen ovan har vi att  $\Delta h(x) = h(x+d) - h(x)$  och då ger

$$\lim_{d \rightarrow 0} \Delta h(x) = \lim_{d \rightarrow 0} h(x+d) - h(x) = 0 \quad (\text{A.34})$$

och ekvation A.33 blir

$$g'(x)h(x) + g(x)h'(x) \quad (\text{A.35})$$

Vi har alltså visat att derivatan av funktionen

$$f(x) = g(x)h(x) \quad (\text{A.36})$$

är

$$f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) \quad (\text{A.37})$$

och vi kallar den *produktregeln*.

## A.7 Derivata av sammansatt funktion

Derivatans av den sammansatta funktionen  $f(g(x))$  (eller ibland  $f \circ g$ ) är

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x) \quad (\text{A.38})$$

eller med annan notation

$$\frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df(g(x))}{dg(x)} \cdot \frac{dg(x)}{dx} \quad (\text{A.39})$$

En förutsättning är att både  $f(x)$  och  $g(x)$  är deriverbara i  $x$ . Vi kallar detta *kedjeregeln*.

För att bevisa (A.38) observerar vi att eftersom  $f$  och  $g$  är deriverbara i  $x$  så finns  $g'(x)$  och  $f'(g(x))$  och enligt den alternativa definitionen av deriverbarhet (A.6) har vi

$$g(x+h) - g(x) = (g'(x) + \rho_1(x, h))h \quad (\text{A.40})$$

samt

$$f(g(x) + k) - f(g(x)) = [f'(g(x)) + \rho_2(g(x), k)]k \quad (\text{A.41})$$

där  $\lim_{h \rightarrow 0} \rho_1(x, h) = 0$  och  $\lim_{k \rightarrow 0} \rho_2(g(x), k) = 0$ . Vi låter

$$k = g(x+h) - g(x) \quad (\text{A.42})$$

och skriver

$$\begin{aligned} f(g(x+h)) - f(g(x)) &= [f'(g(x)) + \rho_2(g(x), k)](g(x+h) - g(x)) \\ &= [f'(g(x)) + \rho_2(g(x), k)](g'(x) + \rho_1(x, h))h \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

Vi får då differenskvoten för  $f(g(x))$  som

$$\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = [f'(g(x)) + \rho_2(g(x), k)](g'(x) + \rho_1(x, h)) \quad (\text{A.44})$$

Vi bildar gränsvärdet

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} [f'(g(x)) + \rho_2(g(x), k)](g'(x) + \rho_1(x, h)) \quad (\text{A.45})$$

Eftersom  $g(x)$  är deriverbar och då också kontinuerlig så gäller att

$$\lim_{h \rightarrow 0} k = \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) - g(x) = 0 \quad (\text{A.46})$$

och därför gäller också  $\lim_{h \rightarrow 0} \rho_2(g(x), k) = 0$ . Även  $\lim_{h \rightarrow 0} \rho_1(x, h) = 0$  och ur (A.45) får vi gränsvärdet

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = f'(g(x))g'(x) \quad (\text{A.47})$$

Vi har visat att derivatan av  $f(g(x))$  är

$$\frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df(g(x))}{dg(x)} \cdot \frac{dg(x)}{dx} \quad (\text{A.48})$$

och vi kallar detta *kedjeregeln*.

## A.8 Differentialekvationer

En *differentialekvation* är en ekvation som beskriver sambandet mellan en funktion och dess derivator. En *ordinär* differentialekvation (en ODE) är en differentialekvation där den okända funktionen beror av endast en variabel.

En allmän ODE av  $n$ :te ordningen har formen

$$y^{(n)}(x) = F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \quad (\text{A.49})$$

En differentialekvation är linjär om  $F$  kan skrivas som en linjärkombination av  $y$ s derivator, alltså

$$y^{(n)}(x) = r(x) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x)y^{(i)}(x) \quad (\text{A.50})$$

där  $a_i(x)$  och  $r(x)$  är kontinuerliga funktioner med avseende på  $x$ . Om alla  $a_i$  är konstanter, dvs ej beror av  $x$  har vi en linjär ordinär differentialekvation med konstanta koefficienter.

Om  $r(x) = 0$  så är differentialekvationen *homogen*, om  $r(x) \neq 0$  är ekvationen *inhomogen*. En homogen ordinär differentialekvation av ordning  $n$  kan skrivas på formen

$$a_0(x)y(x) + a_1(x)y'(x) + \dots + a_n(x)y^{(n)}(x) = 0 \quad (\text{A.51})$$

en inhomogen blir på motsvarande form

$$a_0(x)y(x) + a_1(x)y'(x) + \dots + a_n(x)y^{(n)}(x) = r(x) \quad (\text{A.52})$$

Om  $y(x)$  är den *allmänna* lösningen till en inhomogen linjär differentialekvation med konstanta koefficienter så är

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \quad (\text{A.53})$$

där  $y_h(x)$  är lösningen till motsvarande homogena differentialekvation (den homogena lösningen) och  $y_p(x)$  är en *partikulär* lösning till den inhomogena ekvationen.

## A.9 Integrerande faktor

Standardformen för en linjär differentialekvation av första ordningen är

$$\frac{dy(x)}{dx} + g(x)y(x) = h(x) \quad (\text{A.54})$$

Om vi kan finna en funktion  $m(x)$  så att

$$\frac{dm(x)}{dx} = g(x) \quad (\text{A.55})$$

kan vi multiplicera båda leden i (A.54)

$$\begin{aligned} m(x) \left( \frac{dy(x)}{dx} + g(x)y(x) \right) &= m(x)h(x) \\ m(x) \frac{dy(x)}{dx} + m(x)g(x)y(x) &= m(x)h(x) \end{aligned} \quad (\text{A.56})$$

och med hjälp av produktregeln (A.25) får vi

$$\frac{d}{dx}(m(x)y(x)) = m(x)h(x) \quad (\text{A.57})$$

vi integrerar båda sidorna

$$m(x)y(x) = \int m(x)h(x)dx \quad (\text{A.58})$$

och vi får lösningen till differentialekvationen som

$$y(x) = \frac{1}{m(x)} \int m(x)h(x)dx \quad (\text{A.59})$$

För att slutföra vår lösning behöver vi finna funktionen  $m(x)$  som vi kallar *integrerande faktor*. Låt  $m(x)$  vara

$$m(x) = e^{G(x)} \quad (\text{A.60})$$

där  $G(x)$  är en primitiv funktion (A.7) till  $g(x)$ , alltså

$$G(x) = \int g(x)dx \quad (\text{A.61})$$

Vi har  $f(x) = e^x$  och derivatan av  $f(x)$  är

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{de^x}{dx} = e^x \quad (\text{A.62})$$

och vi vet från definitionen av en primitiv funktion (A.7) att

$$\frac{dG(x)}{dx} = g(x) \quad (\text{A.63})$$

med hjälp av *kedjeregeln* (A.38) får vi

$$\frac{d}{dx}e^{G(x)} = e^{G(x)} \cdot g(x) = m(x)g(x) \quad (\text{A.64})$$

Lösningen blir då

$$y(x) = \frac{1}{e^{G(x)}} \int e^{G(x)}h(x)dx \quad (\text{A.65})$$

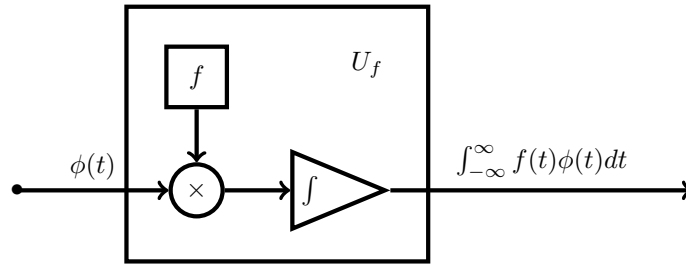
## A.10 Distributioner

En distribution är en typ av generaliserad funktion, som definieras genom sin effekt på en annan funktion (testfunktionen) under en integral. Med hjälp av distributioner är det möjligt att differentiera vissa funktioner vars derivata i vanlig mening inte existerar. Distributionerna är användbara vid lösning av differentialekvationer och beskrivning av olika typer av system.

En distribution  $U$  definieras som värdet av den *symboliska* integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} U(t)\phi(t)dt \quad (\text{A.66})$$

Distributioner är en klass linjära funktioner som avbildar en mängd *testfunktioner* ( $\phi$ ) på den reella talmängden. För alla testfunktioner i mängden gäller att



Figur A.1: Distributionen  $U_f$ .

- $\phi$  är deriverbar oändligt många gånger ( $\phi$  är glatt).
- $\phi$  är noll utanför en ett begränsat intervall ( $\phi$  har kompakt stöd).

Vi kräver att de symboliska integralerna  $\int_{-\infty}^{\infty} U(t)\phi(t)dt$  beror linjärt och kontinuerligt på  $\phi$ . En distribution är då en linjär och kontinuerlig avbildning som till varje testfunktion ordnar ett tal.

Varje vanlig funktion  $f(t)$  som är lokalt integrerbar kan då bilda en distribution  $U_f$  genom

$$\int_{-\infty}^{\infty} U_f(t)\phi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi(t)dt \quad (\text{A.67})$$

Det är möjligt att rekonstruera  $f(t)$  ur  $U_f$  (i varje kontinuerlig punkt) genom att låta testfunktionen  $\phi$  vara smala, höga, pulser. I fortsättningen kan vi likställa  $U_f$  med  $f$ .

### A.10.1 Derivata av distribution

Med funktionen  $f$  och testfunktionen  $\phi$  skriver vi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\phi(t)dt = [f(t)\phi(t)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi'(t)dt \quad (\text{A.68})$$

Men testfunktionen är noll utanför ett begränsat intervall, vilket innebär att  $[f(t)\phi(t)]_{-\infty}^{\infty}$  blir noll och kvar blir alltså

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\phi(t)dt = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi'(t)dt \quad (\text{A.69})$$

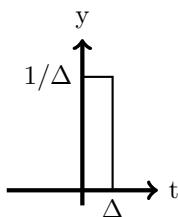
Vi definierar alltså derivatan  $U'$  av distributionen  $U$  som

$$\int_{-\infty}^{\infty} U'(t)\phi(t)dt = - \int_{-\infty}^{\infty} U(t)\phi'(t)dt \quad (\text{A.70})$$

för varje testfunktion  $\phi$ .

### A.10.2 Viktiga distributioner

Tre viktiga distributioner är *deltafunktionen*, *stegfunktionen* och *rampfunktionen*.



Figur A.2: Enhetspuls.

**Deltafunktionen** Deltafunktionen som ibland också kallas diracs deltafunktion, diracdelta, impulsfunktion eller enhetspuls, kan tänkas som en funktion

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & \text{if } t = 0 \\ 0, & \text{if } t \neq 0 \end{cases} \quad (\text{A.71})$$

som har integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (\text{A.72})$$

Denna beskrivning håller dock inte matematiskt. Istället definieras deltafunktionen som en distribution.  $\delta(t)$  definieras genom egenskapen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi(t) dt = \phi(0) \quad (\text{A.73})$$

för varje kontinuerlig funktion  $\phi(t)$ . Då gäller också följande

1.  $\delta(t) = 0$  då  $t \neq 0$ .
2.  $\phi(t)\delta(t) = \phi(0)\delta(t)$  för alla kontinuerliga  $\phi$ .
3.  $\int_a^b \delta(t) dt = 1$  om  $a < 0 < b$ .

**Derivata** Deltafunktionens distributionsderivata ges direkt av definitionen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)\phi(t) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi'(t) dt = -\phi'(0) \quad (\text{A.74})$$

En möjlig tolkning av deltafunktionens derivata fås om deltafunktionen tänks vara gränsvärdet av en enhetspuls där  $\Delta$  får gå mot 0. Alltså, låt enhetspulsen  $p_{\Delta}(t)$  vara (se figur A.2)

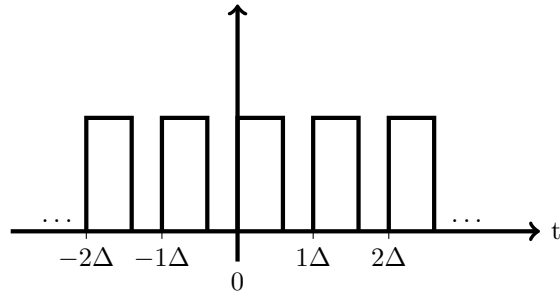
$$p_{\Delta}(t) = \frac{\theta(t) - \theta(t - \Delta)}{\Delta} \quad (\text{A.75})$$

där  $\theta$  är stegfunktionen, som definieras i (A.84) nedan. Tänk  $\delta(t)$  som

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} p_{\Delta}(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\theta(t) - \theta(t - \Delta)}{\Delta} \quad (\text{A.76})$$

Då fås derivatan  $\delta'(t)$  som

$$\delta'(t) = p'_{\Delta}(t) = \frac{d}{dt} \frac{\theta(t) - \theta(t - \Delta)}{\Delta} \quad (\text{A.77})$$



Figur A.3: Enhetspulståg.

Men i (A.87) fås stegfunktionens derivata som  $\theta'(t) = \delta(t)$  och

$$\delta'(t) = \frac{\delta(t) - \delta(t - \Delta)}{\Delta} \quad (\text{A.78})$$

Derivatans av deltafunktionen kan alltså tolkas som en dipol.

Derivatans produktregel (A.25) ger

$$\frac{d}{dt} f(t)\delta(t) = f(t)\delta'(t) + f'(t)\delta(t) \quad (\text{A.79})$$

som kan skrivas om till

$$f(t)\delta'(t) = \frac{d}{dt} f(t)\delta(t) - f'(t)\delta(t) = \frac{d}{dt} f(0)\delta(t) - f'(0)\delta(t) \quad (\text{A.80})$$

Men detta är

$$f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t) \quad (\text{A.81})$$

Denna formel är synnerligen användbar vid förenkling av uttryck där derivatan av deltafunktionen ingår.

**Deltasåll** En mycket viktig egenskap hos deltafunktionen är dess verkan i serie, som ett impulståg. Skriv, med enhetspulsen  $p_\Delta(t)$  (A.75)

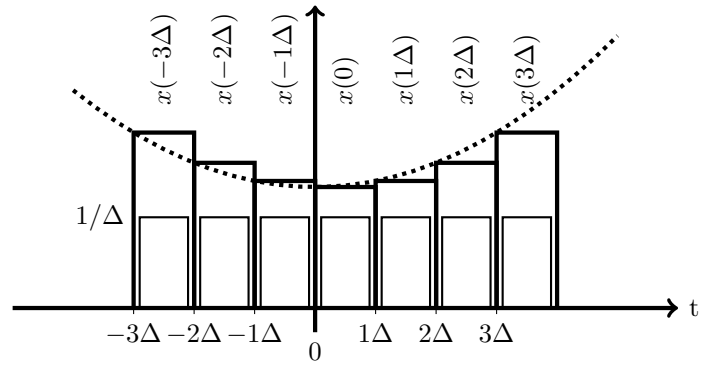
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\Delta p_\Delta(t - k\Delta) \quad (\text{A.82})$$

Summan av det tidsskiftade enhetspulserna bildar ett pulståg, se figur A.3. Summan av produkterna av  $x(k\Delta)$  och  $\Delta p_\Delta(t - k\Delta)$  blir en stegvis approximation av  $x(t)$ , se figur A.4. När sedan  $\Delta$  går mot noll blir summan integralen

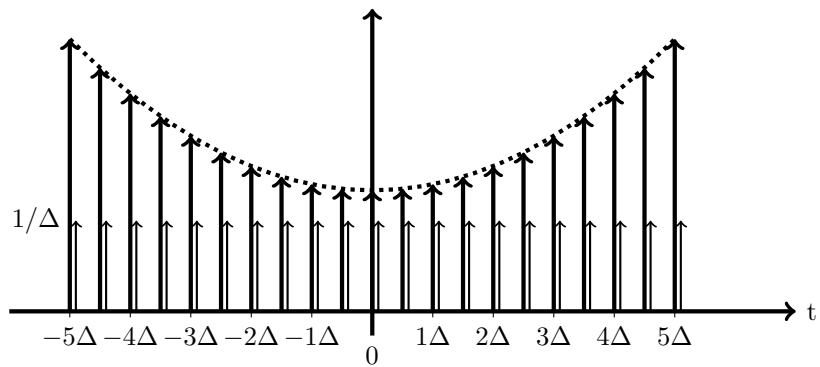
$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\Delta p_\Delta(t - k\Delta) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau \quad (\text{A.83})$$

som illustreras i figur A.5.





Figur A.4: Rektangelpulståg  $p_\Delta(t - k\Delta)$  över  $x(k\Delta)$ .



Figur A.5: Tåg av deltafunktionen  $\delta(t - k\Delta)$  över  $x(k\Delta)$ .

**Stegfunktionen** Stegfunktionen, Heavisides stegfunktion eller enhetssteget, definieras som funktionen

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & \text{if } t < 0 \\ 1, & \text{if } t > 0 \end{cases} \quad (\text{A.84})$$

**Derivata** Stegfunktionens distributionsderivata,  $\theta'(t)$  ges av

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta'(t)\phi(t)dt = - \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t)\phi'(t)dt \quad (\text{A.85})$$

Men eftersom  $\phi$  är en testfunktion får vi

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t)\phi'(t)dt = - \int_0^{\infty} \phi'(t)dt = - [\phi(t)]_0^{\infty} = -\phi(\infty) + \phi(0) = \phi(0) \quad (\text{A.86})$$

Vi vet att  $\phi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi(t)dt$ , alltså deltafunktionen. Då fås alltså stegfunktionens derivata som deltafunktionen, dvs

$$\theta'(t) = \delta(t) \quad (\text{A.87})$$

**Rampfunktionen** Slutligen beskrivs också rampfunktionen, som definieras som funktionen

$$r(t) = \begin{cases} t, & \text{if } t \geq 0 \\ 0, & \text{if } t < 0 \end{cases} \quad (\text{A.88})$$

Alternativt kan rampfunktionen beskrivas som

$$r(t) = t\theta(t) \quad (\text{A.89})$$

**Derivata** Rampfunktionens distributionsderivata,  $r'(t)$  ges av

$$\int_{-\infty}^{\infty} r'(t)\phi(t)dt = - \int_{-\infty}^{\infty} r(t)\phi'(t)dt = - \int_{-\infty}^{\infty} t\theta(t)\phi'(t)dt \quad (\text{A.90})$$

Men, eftersom  $\theta(t)$  är 0 då  $t < 0$  får vi

$$\int_{-\infty}^{\infty} r'(t)\phi(t)dt = - \int_0^{\infty} t\phi'(t)dt \quad (\text{A.91})$$

Partiell integration ger

$$- \int_0^{\infty} t\phi'(t)dt = [-t\phi(t)]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \phi(t)dt = 0 + \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t)\phi(t)dt \quad (\text{A.92})$$

Då fås alltså rampfunktionens derivata som stegfunktionen, dvs

$$r'(t) = \theta(t) \quad (\text{A.93})$$

## A.11 Faltning

Faltningen av två funktioner  $f(t)$  och  $g(t)$  definieras som integralen av produkten av  $f$  och  $g$  där den ena funktionen är omvänd och skiftad.

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau \quad (\text{A.94})$$

Faltning är både kommutativ, associativ och distributiv, dvs

$$f * g = g * f \quad (\text{A.95})$$

$$f * (g * h) = (f * g) * h \quad (\text{A.96})$$

$$f * (g + h) = (f * g) + (f * h) \quad (\text{A.97})$$

$$a(f * g) = (af) * g \quad (\text{A.98})$$

Även distributioner kan faltas. Faltningen av en testfunktion  $\phi$  och en distribution  $U$  definieras som

$$\phi * U(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t - \tau)U(\tau)d\tau \quad (\text{A.99})$$

Faltning av testfunktionen  $\phi$  och deltafunktionen

$$\phi * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t - \tau)\delta(\tau)d\tau = [\phi(t - \tau)]_{\tau=0} = \phi(t) \quad (\text{A.100})$$

ger alltså  $\phi * \delta = \phi$ , dvs deltafunktionen är enhet vid faltning. Det är ibland möjligt att falta distributioner med varandra. Följande villkor är tillräckliga för att faltningen av distributionerna  $U * V$  skall existera

1.  $U * V$  är definierad om  $U$  eller  $V$  båda är noll utanför ett begränsat intervall.
2.  $U * V$  är definierad och kausal om  $U$  och  $V$  är kausala.

För faltning av distributioner gäller följande räkneregler

1.  $U * V = V * U$
2.  $U * (V + W) = U * V + U * W$
3.  $U * (V * W) = (U * V) * W$  om minst två av  $U, V, W$  har kompakt stöd eller om alla tre är kausala.
4.  $\frac{d}{dt}U * V = \frac{dU}{dt} * V = U * \frac{dV}{dt}$  om  $U * V$  är definierad.
5.  $\delta * U = U$  för varje  $U$

## A.12 Laplacetransformation

En funktion  $f(t)$  har *Laplacetransformen*  $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$  som definieras av

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}f(t)dt \quad (\text{A.101})$$

där  $s$  är komplext, dvs  $s = \sigma + i\omega$ .

**Konvergens** Laplacetransformen av  $f$  är definierad för de  $s$  där integralen konvergerar. Eftersom

$$|e^{-st}f(t)| = |e^{-\sigma t}e^{-i\omega t}f(t)| = e^{-\sigma t}|f(t)| \quad (\text{A.102})$$

så är integralens konvergens oberoende av  $s$  imaginärdel ( $\omega$ ). Låt

$$F_+(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt \quad (\text{A.103})$$

$$F_-(s) = \int_{-\infty}^0 e^{-st}f(t)dt \quad (\text{A.104})$$

Om  $F_+$  konvergerar absolut för ett  $\sigma = \alpha$  så kommer  $F_+$  att konvergera för alla  $\sigma > \alpha$ . Likaledes, för  $F_-$  gäller att om  $F_-$  konvergerar för  $\sigma = \beta$  kommer  $F_-$  att konvergera för alla  $\sigma > \beta$ . Därmed kan vi konstatera att Laplaceintegralen konvergerar i området som är en strimla av det komplexa talplanet där  $\alpha < \text{Re}(s) < \beta$ . På strimlans rand kan integralen konvergera eller divergera. Om  $\beta < \alpha$  är integralen inte absolut konvergent för något  $s$ .

**Invers** Laplacetransformationens invers ges av

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st}F(s)ds \quad (\text{A.105})$$

givet att Laplacetransformen  $F(s)$  av funktionen  $f(t)$  existerar i områden  $\alpha < \text{Re}(s) < \beta$  och om  $\alpha < \sigma > \beta$ .

**Ensidig** Den *ensidiga* Laplacetransformen  $\mathcal{L}_I\{f(t)\}(s)$  av funktionen  $f(t)$  ( $-\infty < t < \infty$ ) definieras genom

$$\mathcal{L}_I\{f\}(s) = \mathcal{L}\{\theta(t)f(t)\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt \quad (\text{A.106})$$

Den ensidiga Laplacetransformens derivata skiljer sig från den dubbelsidiga. Om  $x(t)$  har Laplacetransformationen  $\mathcal{L}_I\{x(t)\}(s) = X(s)$  så ges  $\mathcal{L}_I\{x'(t)\}(s)$  av

$$\int_0^{\infty} x'(t)e^{-st}dt = [x(t)e^{-st}]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} x(t)e^{-st}dt = sX(s) - x(0) \quad (\text{A.107})$$

Ett annat sätt att tänka sig derivering av ensidiga (avskurna) funktioner följer av stegfunktionens derivata (A.87) och blir

$$\mathcal{L}_I\{f^{(n)}(t)\} = s^n \mathcal{L}_I\{f(t)\}(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \quad (\text{A.108})$$

eftersom derivatan av en avskuren funktion är

$$\theta(t)f^{(n)}(t) = (\theta f)^{(n)}(t) - f(0)\delta^{(n-1)} - \dots - f^{(n-2)}(0)\delta' - f^{(n-1)}(0) \quad (\text{A.109})$$

och eftersom

$$\mathcal{L}\{\theta f^{(n)}\} = \mathcal{L}_I\{f^{(n)}\}, \quad \mathcal{L}\{(\theta f)^{(n)}\} = s^n \mathcal{L}\{\theta f\} = s^n \mathcal{L}_I\{f\} \quad (\text{A.110})$$

Faltningen blir också den annorlunda i den ensidiga Laplacetransformen. Faltas två avskurna funktioner  $\theta(t)f(t)$  och  $\theta(t)g(t)$  med varandra fås

$$(\theta f) * (\theta g)(t) = \theta(t) \left( \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau \right) \quad (\text{A.111})$$

och den ensidiga Laplacetransformationen blir

$$\mathcal{L}_I \left\{ \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau \right\} (s) = \mathcal{L}_I \{f\} (s) \mathcal{L}_I \{g\} (s) \quad (\text{A.112})$$

**Räkneregler** Följande gäller för Laplacetransformen

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s) \quad (\text{linjäritet}) \quad (\text{A.113})$$

$$f(at) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad (\text{skalning}) \quad (\text{A.114})$$

$$f(t-t_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-st_0} F(s) \quad (\text{fördröjning}) \quad (\text{A.115})$$

$$e^{s_0 t} f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s-s_0) \quad (\text{dämpning}) \quad (\text{A.116})$$

$$f'(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} sF(s) \quad (\text{tidsderivation}) \quad (\text{A.117})$$

$$f^{(n)}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s^n F(s) \quad (\text{tidsderivation}) \quad (\text{A.118})$$

$$f'(t) \xrightarrow{\mathcal{L}_I} sF(s) - f(0) \quad (\text{tidsderivation}) \quad (\text{A.119})$$

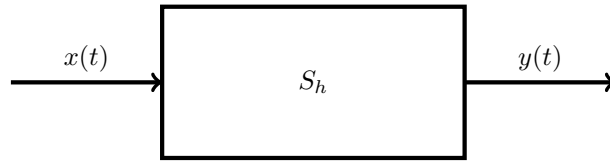
$$f^{(n)}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}_I} s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0) \quad (\text{tidsderivation}) \quad (\text{A.120})$$

$$-tf(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{sF(s)}{ds} \quad (\text{frekvensderivation}) \quad (\text{A.121})$$

$$\lim_{t \rightarrow +0} f(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s) \quad (\text{begynnelsevärde}) \quad (\text{A.122})$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow +0} sF(s) \quad (\text{slutvärde}) \quad (\text{A.123})$$

$$f(t) * g(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)G(s) \quad (\text{faltning}) \quad (\text{A.124})$$



Figur A.6: Ett system,  $S_h$ .

**Transformer** Följande är några vanliga Laplacetransformer

$$\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} 1 \quad (\text{A.125})$$

$$\delta(t - T) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-Ts} \quad (\text{A.126})$$

$$\delta'(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s \quad (\text{A.127})$$

$$\delta^{(n)}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s^n \quad (\text{A.128})$$

$$1, \theta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} \quad (\text{A.129})$$

$$t, r(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s^2} \quad (\text{A.130})$$

$$t^n \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (\text{A.131})$$

$$e^{at} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s - a} \quad (\text{A.132})$$

### A.13 System

Många företeelser kan beskrivas som ett *system*, till exempel en fysikalisk process, en elektrisk krets eller ett kommunikationssystem.

Ett system har en eller flera *insignaler*,  $x(t)$ , och en eller flera *utsignaler*,  $y(t)$ . Systemet ordnar till varje välartad insignal en utsignal. Vi skriver

$$y(t) = \mathcal{T}[x(t)] \quad (\text{A.133})$$

där  $\mathcal{T}$  representerar systemets verkan på  $x(t)$ .

En speciell klass av system är de *linjära* och *tidsinvarianta* systemen. Om insignalerna  $x_1(t)$  och  $x_2(t)$  ger utsignalerna  $y_1(t)$  och  $y_2(t)$  och om insignalen

$$a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \quad (\text{A.134})$$

ger utsignalen

$$a_1y_1(t) + a_2y_2(t) \quad (\text{A.135})$$

så säger vi att systemet är *linjärt*. Alltså, ett system  $\mathcal{T}$  är linjärt om

$$\mathcal{T} \left[ \sum_{k=1}^n a_k x_k(t) \right] = \sum_{k=1}^n a_k \mathcal{T}[x_k(t)] \quad (\text{A.136})$$

Om insignalen  $x(t)$  ger utsignalen  $y(t)$  och insignalen  $x(t-T)$  ger utsignalen  $y(t-T)$  så säger vi att systemet är *tidsinvariant*. Eller, uttryckt med systemoperatorn

$\mathcal{T}$ , ett system  $\mathcal{T}$  är tidsinvariant om

$$y(t) = \mathcal{T}[x(t)] \implies y(t - \tau) = \mathcal{T}[x(t - \tau)] \quad (\text{A.137})$$

Ett system vars utsignal endast beror av tidigare insignaler är *kausalt*. Alltså, för ett kausalt system påverkas inte av insignaler som ännu inte inträffat. Mer formellt, ett system  $\mathcal{T}$  som till signalen  $x$  ordnar utsignalen  $y$  är *kausalt* om för paret av insignaler  $x_1$  och  $x_2$  sådana att

$$x_1(t) = x_2(t), \quad \forall t \leq t_0 \quad (\text{A.138})$$

de korresponderande utsignalerna uppfyller

$$y_1(t) = y_2(t), \quad \forall t \leq t_0 \quad (\text{A.139})$$

**Impulssvar** Ett systems *impulssvar* är systemets utsignal givet en deltafunktion som insignal. Impulssvaret betecknas i allmänhet som  $h(t)$ .

$$h(t) = \mathcal{T}[\delta(t)] \quad (\text{A.140})$$

Skriv signalen  $x(t)$  till det linjära och tidsinvarianta systemet  $\mathcal{T}$  som

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau \quad (\text{A.141})$$

då fås utsignalen som

$$y(t) = \mathcal{T}[x(t)] = \mathcal{T}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau\right] \quad (\text{A.142})$$

vilket ger

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\mathcal{T}[\delta(t - \tau)]d\tau \quad (\text{A.143})$$

eftersom systemet är linjärt och  $\mathcal{T}$  verkar *över tiden*  $t$ . Av (A.140) följer sedan

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (\text{A.144})$$

Ovanstående känns igen som en faltning (A.94) och därav följer det anmärkningsvärda resultatet

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (\text{A.145})$$

Alltså beskrivs utsignalen  $y(t)$  från ett system  $\mathcal{T}$  med signalen  $x(t)$  fullständigt av systemets impulssvar  $h(t)$ . Systemet är *kausalt* om impulssvaret  $h(t)$  uppfyller

$$h(t) = 0, \quad t < 0 \quad (\text{A.146})$$

**Överföringsfunktion** Laplacetransformationen kan användas för att lösa differentialekvationer. En linjär differentialekvation med konstanta koefficienter

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(t), \quad -\infty < t < \infty \quad (\text{A.147})$$

Laplacetransformeras till

$$a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = F(s) \quad (\text{A.148})$$

där  $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$  och  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$  och då blir Laplacetransformationen av utsignalen  $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{1}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n+1} + \dots + a_1 s + a_0} F(s) \quad (\text{A.149})$$

Genom att inverstransformera  $Y(s)$  så fås lösningen som

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} \quad (\text{A.150})$$

Kvoten

$$H(s) = \frac{1}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n+1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (\text{A.151})$$

är systemets *överföringsfunktion* och är Laplacetransformationen av systemets impulssvar  $h(t)$ .

Sammanfattningsvis konstateras att om ett linjärt och tidsinvariant system har överföringsfunktionen  $H(s)$ , insignalen  $x(t)$  har Laplacetransformationen  $X(s)$  och utsignalen  $y(t)$  har Laplacetransformationen  $Y(s)$  så är sambandet mellan dem

$$Y(s) = H(s)X(s) \quad (\text{A.152})$$

Överföringsfunktionen är alltså kvoten mellan Laplacetransformationerna av systemets utsignal och insignal.

**Begynnelsevärden** Vid lösning av differentialekvationer är det mycket vanligt att systemets förlopp innan en viss tidpunkt är okänt men att systemets *tillstånd* vid denna tidpunkt är känt i form av en uppsättning begynnelsevillkor. För linjära differentialekvationer med konstanta koefficienter kan man använda Laplacetransformationen, antingen den ensidiga eller den dubbelsidiga.

För att illustrera metoden betraktas differentialekvationen

$$y'(t) + ay(t) = x(t), \quad t > 0 \quad (\text{A.153})$$

med begynnelsevillkoret  $y(0) = b$ . Laplacetransformationen av  $y(t)$  är

$$\mathcal{L}_I\{y(t)\}(s) = Y(s) \quad (\text{A.154})$$

vidare ges transformationen av  $ys$  förstaderivata av A.107 som

$$\mathcal{L}_I\{y'(t)\}(s) = sY(s) - y(0) \quad (\text{A.155})$$

och insignalens transform är  $X(s)$ . Då fås den Laplacetransformerade differentialekvationen som

$$sY(s) - y(0) + aY(s) = X(s) \quad (\text{A.156})$$

och efter omskrivning har vi

$$Y(s) = \frac{X(s) + b}{s + a} \quad (\text{A.157})$$



Inversen av  $1/s + a$  är  $e^{-at}$  (A.12) och vi kan invertera  $Y(s)$  för att få

$$y(t) = \mathcal{L}_I^{-1} \{Y(s)\} = \theta(t)x(t)e^{-at} + be^{-at} \quad (\text{A.158})$$

Sättes sedan  $t$  till 0 visar sig begynnelsevillkoret vara uppfyllt

$$y(0) = \theta(0)x(0) + b = 0 + b = b \quad (\text{A.159})$$

För att istället använda den dubbelsidiga Laplacetransformationen måste differentialekvationen (A.153) skrivas om så att den gäller för  $-\infty < t < \infty$ . För denna omskrivning används stegfunktionen (A.84)

$$\theta(t)y'(t) + a\theta(t)y(t) = \theta(t)x(t), \quad -\infty < t < \infty \quad (\text{A.160})$$

och den omskrivna ekvationen Laplacetransformeras till (samma som (A.156))

$$Y(s) = \frac{X(s) + b}{s + a} \quad (\text{A.161})$$

och vi kan från  $Y(s)$  finna  $\theta y$  som

$$\theta(t)y(t) = \theta(t)x(t)e^{-at} + be^{-at}, \quad -\infty < t < \infty \quad (\text{A.162})$$

I allt väsentligt för ändamålet är de två varianterna i stort sett likvärdiga, valet står mellan att hantera stegfunktioner eller hålla rätt på integrationsgränsen i den ensidiga transformen. Metoderna generaliseras enkelt till högre ordningens differentialekvationer.

# Referenser

- [1] Berghage, T. E., ed. The seventeenth undersea medical society workshop: Decompression Theory, Undersea medical society, Bethesda, Maryland, 1978.
- [2] Bühlmann, A. A., Völm, E. B., Nussberger, P., Tauchmedizin, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 5 ed., 2002, ISBN 978-3-540-42979-1.
- [3] DeNoble, P. J., Vann, R. D., Pollock, N. W., Ugucioni, D. M., Freiburger, J. J., Pieper, C. F., A case control study of decompression sickness (DCS) and arterial gas embolism (AGE), Undersea and Hyperbaric Medical Society, Inc, 2005.
- [4] Dwyer, J. V., Calculation of air decompression tables, Research report 4-56, U. S. Navy Experimental Diving Unit, Washington, 1955.
- [5] Gevantman, L. H., Solubility of selected gases in water, Nitric oxide (NO), 208(3.348), 10-4, 2000.
- [6] Boycott, A. E., Damant, G. C. C., Haldane, J. S., The prevention of compressed-air illness, J. Hygiene, Cambridge, vol. 8, pages 342–443, 1908.
- [7] Hawkins, J. A., Shilling, C. W., Hansen, R. A., A suggested change in calculation of decompression tables for diving, U. S. Naval Medical Bulletin, Vol 33, pages 327-328, 1935.
- [8] Hawkins, J. A., Shilling, C. W., Nitrogen Solubility in Blood at Increased Air Pressures, J. Biol. Chem., vol. 113, pages 273-278, 1936.
- [9] Huggins, K. E., The dynamics of decompression workbook, The universitu of Michigan, Ann Arbor, Michigan, 1992.
- [10] A guide to breathing rates in confined environments, Technical article, Molecular Products Lts, 2016.
- [11] Petersson, J., Glenny, R. W., Gas exchange and ventilation-perfusion relationships in the lung, Physiology in respiratory medicine, vol. 44, pages 1023-1041, 2014.
- [12] Sander, R., Compilation of Henry's law constants (version 4.0) for water as solvent, Atmospheric Chemistry and Physics, vol. 15, pages 4399-4981, 2015.

- [13] Schreiner, H. R., Kelley, P. L., A pragmatic view of decompression, In Lambertsen, C. J., ed, Underwater Physiology: Proceedings of the fourth symposium on underwater physiology, Academic Press, N. Y., 1971.
- [14] Weathersby, P. K., Homer, L. D., Solubility of inert gases in biological fluids and tissues: a review, Undersea Biomedical Research, Vol. 7, No. 4, December 1980.
- [15] Wikipedia, <http://www.wikipedia.org>, 2016.
- [16] Workman, R. D., Calculation of decompression schedules for nitrogen-oxygen and helium-oxygen dives, Research Report 6-65, U. S. Navy Experimental Diving Unit, Washington, 1965.